

Mathe Warm-Up, Teil 1 ^{1 2}

HEUTE:

1. Elementare Rechenoperationen: Brüche, Potenzen, Logarithmus, Wurzeln
2. Summen- und Produktzeichen
3. Gleichungen/Ungleichungen

¹orientiert sich an den Kapiteln 3,4,6,8 des Buches: Vorkurs Mathematik, Erhard Cramer, Johanna Nešlehová, Springer
²Bitte beachten Sie: Dieses Handout kann Fehler enthalten und befindet sich noch in der Überarbeitung.

1 ELEMENTARE RECHENOPS

1.1 Rechnen mit Brüchen

		Tipps, Tricks, Beispiel(e):
Erweitern und Kürzen	<p>Es gilt für Zahlen $a, b \neq 0, c \neq 0$:</p> $\frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b}$ <p style="text-align: center;"> $\xleftarrow{\text{Kürzen}}$ $\xrightarrow{\text{Erweitern}}$ </p>	<p>So kanns einfacher werden:</p> <p>Trick 1: Faktorisieren</p> $\frac{72xy^2 - 45x^2y}{36y^2z + 18y^3z} =$ <p>Trick 2: Binomische Formel</p> $\frac{2x^2 + 4xy + 2y^2}{4(x + y)} =$
Addition und Subtraktion	<p>Summe/Differenz zweier Brüche für Zahlen $a, b \neq 0, c, d \neq 0$:</p> $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$ <p> selber Nenner erforderlich Erweitern Addition Subtraktion </p> $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$	<p>Regel durchziehen:</p> $\frac{1}{3a} + \frac{1}{7a} =$ <p>Bruch zunächst vereinfachen:</p> $\frac{x}{-x - 3y} + \frac{y}{x + 3y} =$
Multiplikation und Division	<p>Produkt zweier Brüche für Zahlen $a, b \neq 0, c, d \neq 0$:</p> $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ <p>\Rightarrow Multiplikation von Zähler und Nenner</p> <p>Quotient zweier Brüche für Zahlen $a, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$:</p> $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ <p>\Rightarrow Multiplikation mit dem Kehrbuch</p>	<p>Beispiele:</p> $\frac{4abc}{32a \cdot 6b} =$ $\frac{3b}{2} : \frac{b}{6} =$

1.2 Potenzen

		Tipps, Tricks, Beispiel(e):
Was sind Potenzen? Basis? Exponent? Was soll das?	<ul style="list-style-type: none"> n-malige Multiplikation ($n \in \mathbb{N}$) identischer Zahlen $a \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow a^n := a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n Faktoren) a^n ist n-te Potenz von a <i>(Basis a, Exponent n)</i> 	
Erweiterung auf Exponenten $n \in \mathbb{Z}$?	<ul style="list-style-type: none"> Potenzen mit negativem Exponenten, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ Potenzen mit Exponent 0: $a^0 = 1$ Spezialfall Basis 0: $0^0 = 1, 0^n = 0$ 	Beispiel: $\left(-\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{2^{-3}} = 8$
!!! Gesetze !!!	Für die Basis $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und Exponenten $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt: <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <ol style="list-style-type: none"> $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ </div>	Beispiele: $\frac{x^n \cdot x^{m-n}}{x^{3m}} = x^{n+m-n-3m} = x^{-2m}$ $\frac{(a^{-4} \cdot x^3)^2}{(x^2 \cdot a^5)^3} = \frac{a^{-8} \cdot x^6}{x^6 \cdot a^{15}} = a^{-23}$
Erweiterung	Bisher: $n \in \mathbb{Z}$ <ul style="list-style-type: none"> Potenzen mit rationalem Exponenten $p = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ (siehe Wurzeln) Potenzen mit reellem Exponenten auch hier gelten die Potenzregeln	

↓
Umkehrungsproblem:
 Wie kann man $b^n = a...$

... nach Basis b auflösen
 (wenn n bekannt)???

... nach Exponent n auflösen
 (wenn b bekannt)???

↓
 WURZELZIEHEN
 ↓

↓
 LOGARITHMIEREN
 ↓

WURZELN (Basis b unbekannt)	LOGARITHMEN (Exponent n unbekannt)
<p>Wurzeln? Radikand? ...</p> <ul style="list-style-type: none"> • $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \geq 1$: Die Gleichung $b^n = a$ besitzt genau eine nicht-negative Lösung b, nämlich $b = \sqrt[n]{a}$ (n-te Wurzel von a) • a heißt <i>Radikand</i>, n <i>Wurzel-exponent</i> 	<p>Logarithmus? verschiedene Basen? ...</p> <ul style="list-style-type: none"> • Die Gleichung $b^n = a$ besitzt genau eine Lösung $n \in \mathbb{R}$, nämlich $n = \log_b(a)$ (Logarithmus von a zur Basis b) • $\log_b(a)$ ist nur für _____ definiert • Basis $e = 2.71828\dots$: Natürlicher Logarithmus _____
<p>Erweiterung auf $a \in \mathbb{R}$: Lösung der Gleichung $b^n = a$, wenn</p> <ul style="list-style-type: none"> • $n \in \mathbb{N}$ ungerade: $b = \sqrt[n]{a}$ • $n \in \mathbb{N}$ gerade ... <ul style="list-style-type: none"> – ... und $a > 0$: _____ – ... und $a < 0$: _____ 	<p>Wichtiges zum Logarithmus:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $\log_b(1) = _$ • $\log_b(b^a) = _$, z.B. $\ln(e^a) = _$ • $b^{\log_b(a)} = _$, z.B. $e^{\ln(a)} = _$ <p>!!!Logarithmusregeln!!!: Für $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ mit $c \neq 1$ gilt:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <ol style="list-style-type: none"> 1. $\log_c(a \cdot b) = _$ 2. $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = _$ 3. $\log_c(b^a) = _$ </div>
<p>Bezug zu Potenzen: Potenzen mit rationalem Exponenten in Wurzelschreibweise Für $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$:</p> <ul style="list-style-type: none"> • $a^{\frac{1}{n}} = _$ • $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$: $a^p = _$ 	<p>Beispiele:</p> <p>$\frac{1}{3} \ln(x^3) + \ln(4) =$</p> <p>$\log_a(4xy) - \log_a(8x) =$</p>

2 SUMMEN- UND PRODUKTZEICHEN

2.1 Das Summenzeichen

2.1.1 Die Bestandteile

2.1.2 Bedienungsanleitung

2.1.3 Warum überhaupt?

2.1.4 Ein paar Beispiele ...

2.2 Das Produktzeichen

Ähnliche Bedienungsanleitung wie das Summenzeichen, aber nun:
In Schritt 2 werden alle so entstandenen Terme multipliziert

Ein paar Beispiele:

$$\bullet \prod_{j=1}^3 (j+1) =$$

$$\bullet \prod_{v=1}^4 e^{2v} =$$

$$\bullet \prod_{j=1}^3 c \cdot (j+1) =$$

$$\bullet \prod_{v=1}^4 e^{2v-1} =$$

3 Gleichungen

3.1 Allgemeines: Gleichungen, Lösungsmenge, Lösungsstrategie ...

- Gleichung:
 - Zwei Terme werden durch “=” in Relation gesetzt (linke Seite = rechte Seite)
 - Terme enthalten i.A. mindestens eine Unbekannte (Variable), z.B. x
- Einsetzen konkreter Zahlen für die Variable führt zu wahrer oder falscher Aussage
- Äquivalente Gleichungen: Zwei äquivalente Gleichungen haben die gleiche Lösungsmenge (Gleichung 1 \Leftrightarrow Gleichung 2)
- *Unser Ziel:*
Bestimmung der Menge an Werten für die Variable(n), die zu einer wahren Aussage führen (Lösungsmenge)
- Zunächst: Nur eine Variable

Rezept zur Bestimmung der Lösungsmenge:

Illustration anhand von

$$4x - 5(x+1) = 7 - 2x$$

1. Bestimme den Definitionsbereich \mathbb{D} der Gleichung (bestehend aus allen reellen Zahlen, für welche die Terme links und rechts erklärt sind)

Bsp:

2. Bestimme die Lösungsmenge

Welche Werte des Definitionsbereiches führen zu einer wahren Aussage?

- (a) Vereinfache die Terme auf beiden Seiten soweit wie möglich

Bsp:

- (b) Nutze *elementare Umformungen*

- _____
 - _____,
- um die Gleichung nach der Unbekannten aufzulösen
 \Rightarrow Die Waage bleibt im Gleichgewicht:

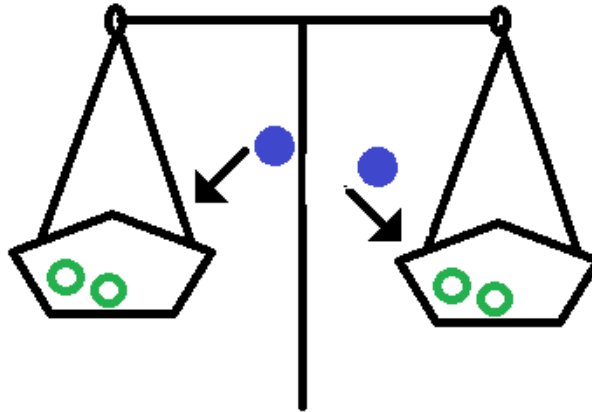


Abbildung 1: Elementare Umformung

\Rightarrow Die Lösungsmenge wird dadurch nicht verändert

Bsp:

(c) Schreibe die Lösungsmenge auf

Bsp:

(d) Mache evtl. Probe: Einsetzen der Variable in die ursprüngliche Gleichung
 \Rightarrow wahre Aussage?

Bsp:

3.2 Lineare Gleichungen

- Unbekannte kommen nur in linearer Form vor
- Definitionsbereich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$
- Lösungsmenge einer linearen Gleichung $ax = b$ ($a, b \in \mathbb{R}$):

– wenn $a \neq 0$: _____

– wenn $a = 0 \dots$

* ... und $b \neq 0$: _____
 Bsp: $4 \cdot (3y - 1) = 2 \cdot (6y - 3)$

* ... und $b = 0$: _____
 Bsp: Wie müsste man das obige Beispiel verändern, damit man unendlich viele Lösungen bekommt?

3.3 Quadratische Gleichungen

- Gleichungen, in denen die Variable höchstens als zweite Potenz vorkommt
- Bringe Gleichung auf die Form $(a, b, c \in \mathbb{R})$:

mit quadratischem Term ax^2 , Linearterm bx und Absolutglied c .

- Definitionsbereich: \mathbb{R}
- Wissenswert für die Bestimmung der Lösungsmenge:
 - Das Produkt zweier Faktoren kann nur dann Null sein, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist:

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0, L = \{x_1, x_2\}$$

- Mitternachtsformel:

Anhand der Mitternachtsformel ist unmittelbar ersichtlich, dass quadratische Gleichungen

- * zwei Lösungen (nämlich wenn: _____),
- * eine Lösung (nämlich wenn: _____) oder
- * keine Lösung (nämlich wenn: _____)

haben können.

3.4 Spezielle Gleichungen

Betragsgleichungen:

- Allgemein: Rechnen mit Beträgen

$$|a| = \begin{cases} \text{_____} & \text{für } a \geq 0 \\ \text{_____} & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Schreibe folgende Ausdrücke ohne Betragszeichen:

$$|2x^2|, |e^{2x}|, |3x + 6|$$

- Gleichungen mit Beträgen:
 - Bestimmung des Definitionsbereichs
 - Wenn unklar, ob Term innerhalb der Betragsstriche positiv oder negativ ist \Rightarrow Fallunterscheidung
 - * Wo ist Inhalt von $|\cdot|$ positiv? Wo negativ?
 - * Löse für beide Fälle nach der Unbekannten auf
 - * Überprüfe, ob Lösung innerhalb des Definitionsbereiches liegt
 - * Bestimme die Lösungsmenge

Beispiel:

$$|3x + 6| - 2x = -5$$

Weitere spezielle Gleichungen:

Gleichungstyp	!!Beachte!!	Beispiel
Bruchgleichungen (wenn Unbekannte x im Nenner)	<ul style="list-style-type: none"> • Definitionsbereich: _____ _____ • Überprüfe, ob für x berechneten Werte vorab Multiplikationen mit (Divisionen durch) Null nötig waren 	$\frac{x-3}{2x-1} = \frac{1}{3}$ $\frac{x-3}{x^2-9} = 0$
Wurzelgleichungen (wenn Unbekannte als Argument von Wurzel vorkommt)	<ul style="list-style-type: none"> • Definitionsbereich: _____ _____ • Auflösen durch Quadrieren 	$\sqrt{x+1} + 1 = 5$
Logarithmische Gleichungen (wenn Unbekannte als Argument von Logarithmus vor- kommt)	<ul style="list-style-type: none"> • Definitionsbereich: nur x- _____ _____ • Auflösen durch Potenzbildung zur Basis des Logarithmus 	$\ln(4x+1) - \ln(3) + 2 = 3$
Exponentialgleichungen (wenn Unbekannte im Exponenten einer Potenz vorkommt)	Auflösung durch Logarithmieren	$e^{2x-1} \cdot e^{4x} = 2$

3.5 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Das Einsetzungsverfahren:

Illustration anhand von

$$I.) 2x_1 - 4x_2 = 3$$

$$II.) x_1 + x_2 = 1$$

1. Löse eine der beiden Gleichungen nach einer beliebigen Unbekannten auf
2. Setze das Ergebnis in die andere Gleichung ein
3. Löse die entstandene lineare Gleichung mit einer Unbekannten
4. Setze die Lösung in die ursprüngliche Gleichung ein und löse nach der anderen Unbekannten auf

4 Ungleichungen

- Nun: Terme nicht mit “=”, sondern mit “ \geq ”, “ \leq ”, “ $<$ ” oder “ $>$ ” in Relation gesetzt
- Lösungsstrategie analog zu Gleichungen
- **Beachte allerdings:** _____

$$-\frac{1}{3}x < 4 \quad | \cdot (-3) \Leftrightarrow x > -12, \quad L =] -12, \infty[$$
$$-2x \leq 4 \quad | /(-2) \Leftrightarrow x \geq -2, \quad L = [-2, \infty[$$