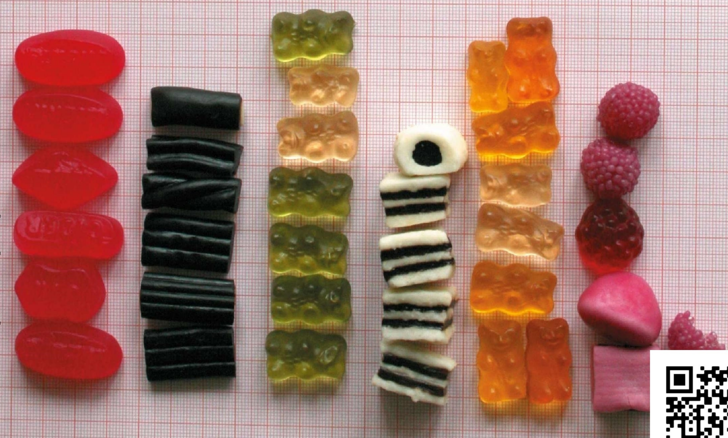
Auf Du und Du mit Statistik und Co.

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Einführung ins Formalisieren für Mathe-Frustrierte

Auf Kriegsfuß mit Mathe und Statistik? Warum wird ständig und überall formalisiert?

Wir bieten eine sanfte Einführung in die wichtigsten Grundlagen an, die gerade in den geistes-, sozial- und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengängen überraschend stark an Bedeutung gewinnen.



Gestaltung: Roland Poellinger / rforge.com

Organisation: Studienbüro Statistik / Mathematische Philosophie
Hunger auf mehr? Info online: www.tinyurl.com/CoVorMa20

Propädeutikum

Formal(isiert)es Denken und empirisches Argumentieren

Thomas Augustin, Cornelia Fütterer, Dominik Kreiß, Malte Nalenz, Georg Schollmeyer, Christoph Heindl und Yusuf Sale[1]

11. November 2020

[1]Vielen Dank an Mitinitiator Roland Pöllinger, Julia Plaß sowie an Cord Dankers, Christiane Didden, Denise Gawron, Aziz Omar, Patrick Schwaferts, Almond Stöcker und Tobias Steinherr

Teil I

Die Allgegenwärtigkeit formal(isiert)en Denkens

1 Vorbemerkungen

Interdisziplinäres Team: Statistik und Mathematische Philosophie

- Thomas Augustin
- Cornelia Fütterer
- Malte Nalenz
- Georg Schollmeyer

- Christoph Heindl
- Dominik Kreiß
- Yusuf Sale

- Vielen Dank auch an Mitinitiator Roland Pöllinger, Julia Plaß sowie an Cord Dankers, Christiane Didden, Denise Gawron, Aziz Omar, Patrick Schwaferts, Almond Stöcker und Tobias Steinherr!

Dilemma: Veranstaltungen aufzeichnen?

- Dagegen:
  - Persönliche Rechte an eigenem Bild und Ton!
  - Die Veranstaltung lebt von der Interaktivität. Wird diese bei einer Aufnahme behindert??
- Andererseits dafür:
  + Nicht jede(r) verfügt über Technik, um live dabei sein zu können
  + Möglichkeit, nicht verstandene Passagen nochmals anzuhören
  + Man kann gut dabei bleiben, wenn man an einem einzelnen Termin verhindert war (ABER: Verlockungen widerstehen)

Experimenteller Kompromiss
(technisch kompliziert und fehleranfällig)

- Aufnahme nur von den vom Dozenten gesprochenen Teilen

- Interaktivität (nur) durch in kurzen Abständen eingestreute Frage- und Diskussionsrunden bzw. bei Meldungen („Raise Hand“, Chat)

- Versehentliche Aufnahmen werden nachher herausgeschnitten

Heute später: Entscheidung, wie wir es in den weiteren Sitzungen handhaben wollen

Wir haben aktuell keine Möglichkeit, Sie zu erreichen!

Zoom-Link für weitere Sessions, Material, kurzfristige Informationen . . .

Jede(r) schreibt JETZT eine leere Email an mich (`augustin@stat.uni-muenchen.de`), bitte mit Betreff „[Formprop]“

Spontan: Ihre Erwartungen

Das Konzept: inhaltlich

- Experimentell, auf Not reagieren
- Förderung durch zentrale Studienzuschüsse
- Nicht nochmals durch Schulmathematik hetzen
- Entscheidend: “Denke“ herausarbeiten:
  Wie ticken formal arbeitende Wissenschaftler(innen)?

Auch die formale “Denke” kann man lernen!

- Passiv

- und sogar aktiv

- so viel braucht man nicht, um ersten Nutzen daraus ziehen zu können

- Formalisierung nicht als exklusive Alternative, sondern als Erweiterung!

Das Konzept: Umsetzung(svorschlag)

- Vorlesung
- Übung
- Nachbetreuung
  - + Wir begleiten Sie, wenn's hart wird.
  - + Unterstützung bei Forums-Eigeninitiative
  - + Sprechstunden

- Aktiv tun!
  + Es gibt keine Noten. Alles was gelingt, hilft; alles was misslingt, schadet nicht.
  + Wir müssen Ihre genauen Bedürfnisse kennenlernen.
  + Wir unterstützen Sie v.a. bei dem Problem, wie man bei einer Frage anfängt. In der Übung “teaching by walking around“.

Kurzer Überblick über die Themenbereiche

- Vorlesung 1: Warum wird ständig formalisiert?
- Vorlesung 2: Algebraische Grundlagen
- Vorlesung 3: Funktionsbegriff und elementare Kurvendiskussion
- Vorlesung 4: Von der Punktewolke zum Zusammenhang

Drei von vielen möglichen Literaturvorschlägen

- Cramer E. & Neslehova J. (2015): *Vorkurs Mathematik: Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen.* (6. Auflage, Medienreihe zur angewandten Statistik). Springer, Berlin.

  * sehr modular aufgebaut
  * kann über die UB elektronisch bezogen werden
  * viele Aufgaben (mit Lösungen)
  * explizit als Vorbereitung auf Statistikveranstaltungen konzipiert

- Mathe für Nicht-Freaks:
  `https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks`
  letzter Aufruf 11.11.2020

- Klinger, M. (2015): *Vorkurs Mathematik für Nebenfachstudierende: Mathematisches Grundwissen für den Einstieg ins Studium als Nicht-Mathematiker.* Springer Spektrum, Wiesbaden.

  * kann über die UB elektronisch bezogen werden

  * viele Aufgaben (mit Lösungen)

Woher kommen Sie?

Spontan: Brainstorming zur Formalisierung

- Was ist eigentlich Formalisierung?
- Wo kommt sie (nicht) vor?
- Was sind ihre Vorteile?
- Welche Nachteile besitzt sie?
- . . .

2 Formalisierung, formale Methoden (informell), Begriffseinordnung

Wissenschaft versus Alltagserfahrung

Nomothetischer Ansatz

- Suche nach “Gesetzmäßigkeiten“
- reduktionistisch
- Hier vorwiegend Gesetze über dichotome Eigenschaften (ja/nein)
- wie sieht ein Gesetz aus ?
- Beziehung zwischen Eigenschaften
- Beziehung zwischen Größen
- “Syllogismus“

DAS Beispiel

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
$\rightarrow$ Sokrates ist sterblich

- Wichtig: Gesetze produzieren Erkenntnisse über beliebige Einzelfälle, die in ihren Geltungsbereich fallen. Sobald wir wissen, dass Max ein Mensch ist, wissen wir, dass Max sterblich ist.

- Das heißt: Wir können Einzelaussagen *ableiten*.

Beispiel (Fortsetzung)

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
$\Rightarrow$ Sokrates ist sterblich.

- Alle Menschen sind sterblich.

- Tatze ist ein Teddybär (, und Teddybären sind keine Menschen).

Beispiel (Fortsetzung)

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
$\Rightarrow$ Sokrates ist sterblich.

- Alle Menschen sind sterblich.

- Tatze ist ein Teddybär (, und Teddybären sind keine Menschen).

- Alle Menschen sind sterblich.

- Maja ist eine Biene (, und Bienen sind keine Menschen).

- Beziehung nicht notwendig umkehrbar!!

Schließen zwischen quantitativen Größen

- 'Formeln' in den Naturwissenschaften

  Hebelgesetz für senkrechte Kräfte: Kraft links $\cdot$ Länge des linken Kraftarms $=$ Kraft rechts $\cdot$ Länge des rechten Kraftarms
  Output $\rightarrow$ Funktion von Input

- Korrelativ versus kausal

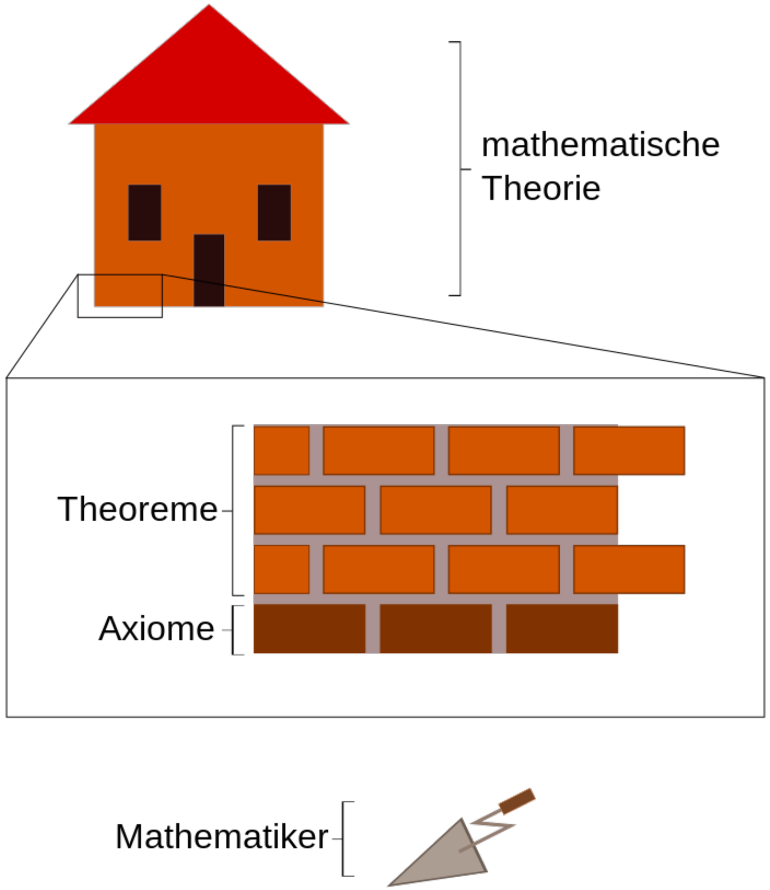
Ein formalistisches Verständnis von Theorie

- Mehrere (sich nicht widersprechende) Gesetze
- Schlussregeln
  wie kombiniert man Aussagen?
- abgeleitete Theoreme
- Gegenteil: falsche Aussagen
- typischerweise gibt es nicht beurteilbare Aussagen

- Nebenbemerkung:
  Modern: Schlüsse müssen nicht ausnahmslos gelten, sondern können “probabilistisch“ (wahrscheinlichkeitsbezogen) sein
  Wenn ..., dann steigt die Wahrscheinlichkeit (das Risiko), dass ...

Axiome

- Die Grundaussagen einer formalisierten Theorie
- Also Axiome + Schlussregeln $\rightarrow$ abgeleitete Theoreme



https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks
Unterpunkt: Grundlagen der Mathematik, Was ist Mathematik, letzter Aufruf 11.11.2020

Exkurs: Typen von Sätzen in einem formal gestalteten Text

Zur Strukturierung beim Lesen nutzen!!

- Theorem (auch “Satz“ in einem mathematischen Sinn)

- Definition

- weiteres

  * Korollar
  * Lemma
  * Proposition
  * Bemerkung
  * Beispiel
  * Gegenbeispiel

- Ferner: Tautologie

Eine (nicht ernst gemeinte) Theorie der Fankonflikte

I Alle Menschen sind Anhänger genau eines Fußballclubs.

II Anhänger(innen) von verschiedenen Fußballclubs mit Lokalrivalität reden nicht miteinander.

III Freunde/-innen reden miteinander.

Was können wir ableiten ?

– ⇒ 1) Anhänger((innen) von Fußballclubs mit Lokalrivalität sind keine Freunde/innen.

⇒ 2) Freunde/innen sind nicht Anhänger(innen) von verschiedenen Fußballclubs mit Lokalrivalität.

- Max ist Bayern-Fan, Paul ist Sechziger $\Longrightarrow$

  * Max und Paul reden nicht miteinander.

  * Max und Paul sind keine Freunde.

- Clarrissa und Mechthild reden miteinander $\Longrightarrow$ Clarrisa und Mechthild sind nicht Anhänger von Fußballclubs mit Lokalrivalität

  aber nicht: Clarissa und Mechthild sind Freundinnen.

Wichtig: Für alle Einheiten, die zum Gegenstandsbereich des formalen Systems gehören, also die Axiome erfüllen, gelten die Folgerungen.

Anforderungen an ein Axiomensystem

- formale Anforderungen

  * gegenseitige Widerspruchsfreiheit

  * Minimalität
    Kein Axiom ist aus dem Rest herleitbar.
    Lässt man ein Axiom weg, dann kann man weniger herleiten.

- Möglichst große Vollständigkeit

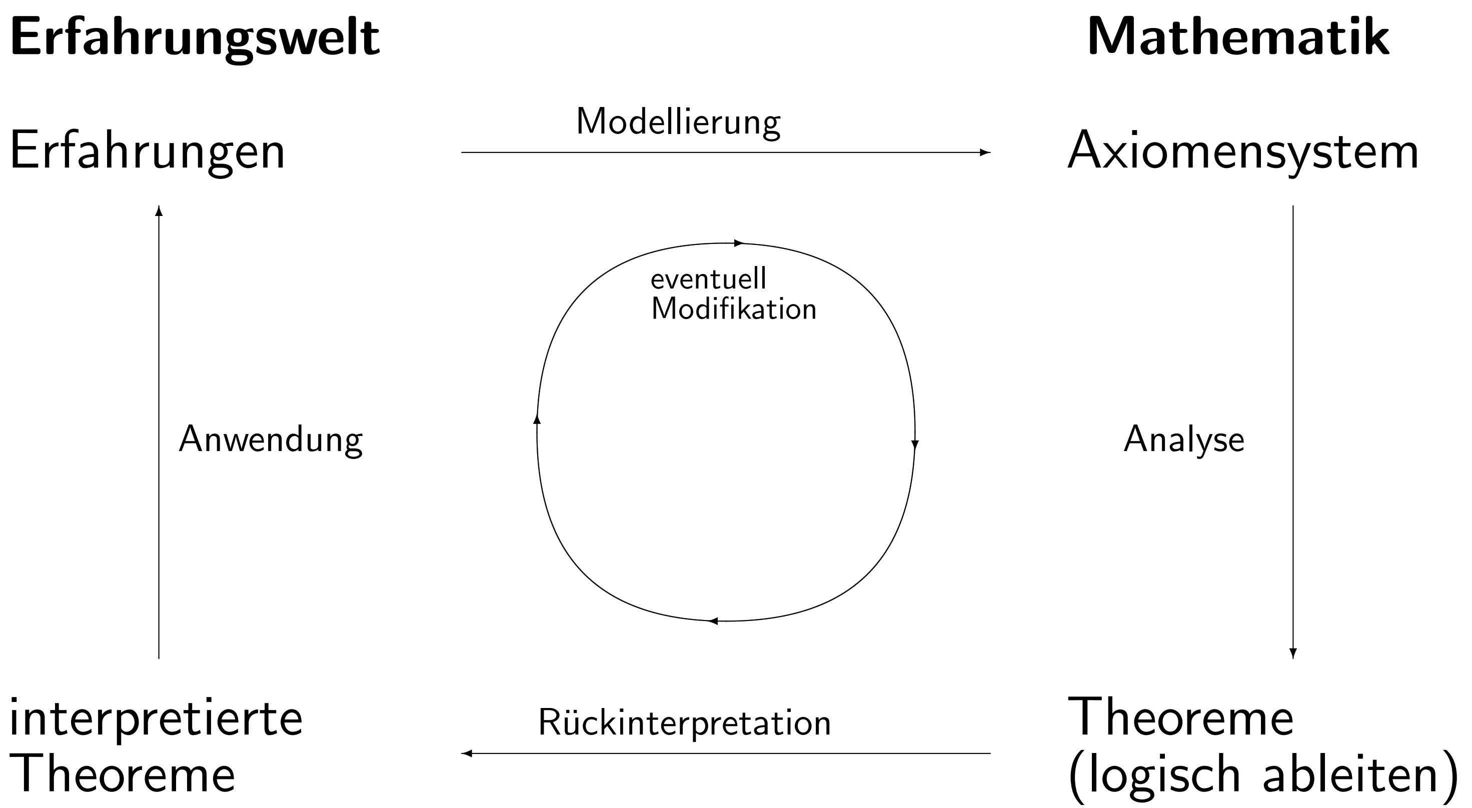
- “Realitätsbezug“

  * keine “falschen Erkenntnisse voraussetzen“

  * wohl auch Relevanzproblem

3 Axiomatisieren, Modellieren, Formalisieren

Axiomatisieren als Modellieren, Modellieren durch Axiomatisieren



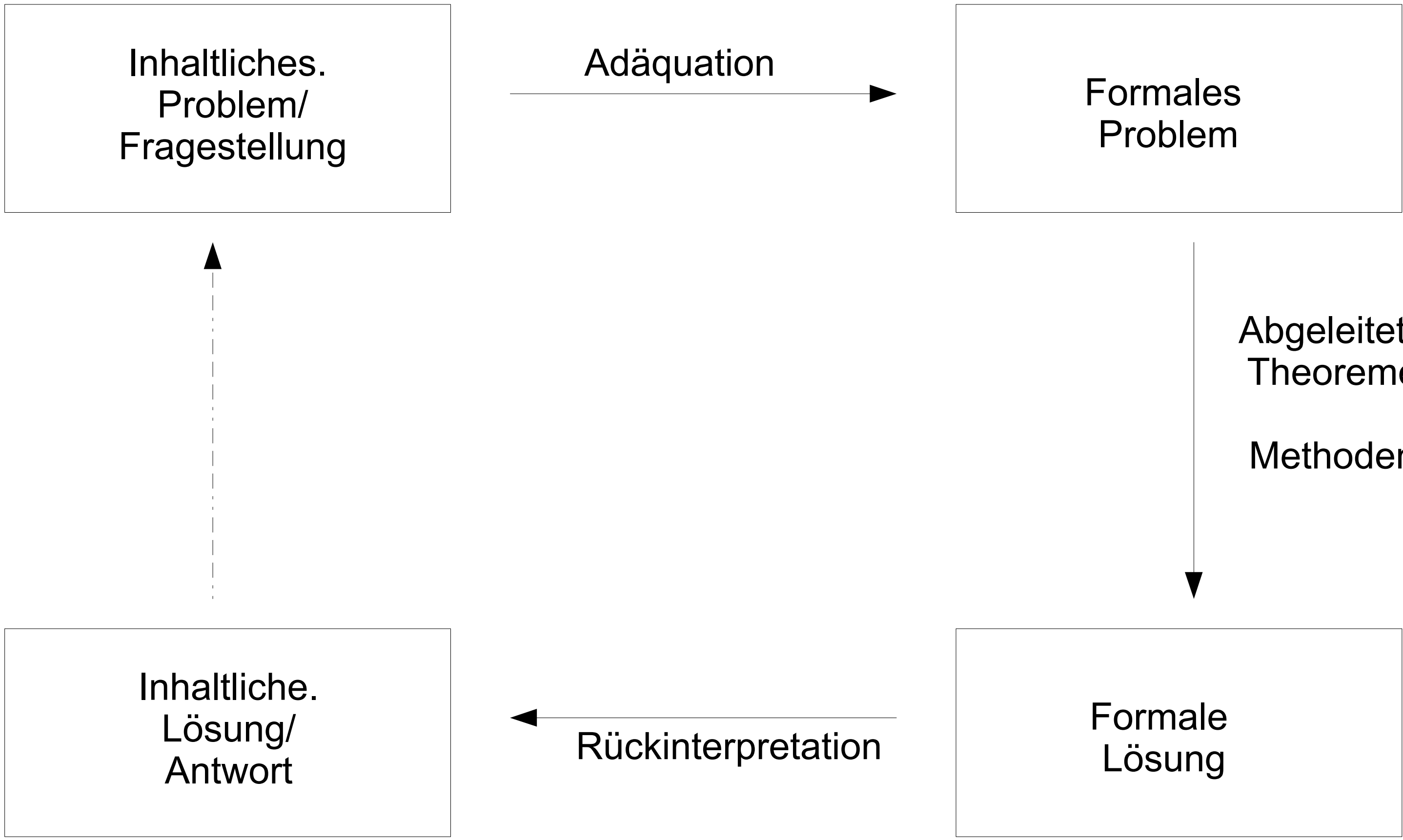
Aus: Behnen, Neuhaus (1987^2): Grundkurs Stochastik. Teubner, S. 9

- Beispiel Watzlawicks Axiomensystem der Kommunikation

  `https://www.paulwatzlawick.de/axiome.html` aufgerufen am 11.20.2020

  www.paulwatzlawick.de/axiome.html

Formalisierung (z.B. Statistik)



Operationalisierung

4 (Nochmals:) Vorteile und Nachteile (Grenzen) des Formalisierens

- Abstrahieren

- Präzisieren

  * von Begriffen
    Intension
    Extension

  * von Beziehungen, Abfolgen, Wirkungsrichtungen
    des Sinngehalts (etwa deskriptive versus normative Aussagen)

  * von Verknüpfungen
    inklusives/exklusives “oder“

  * von impliziten Annahmen

- bewahrt vor logischen Fehlschlüssen

- leichtere Kommunzierbarkeit
- leichtere Überprüfbarkeit

- Prognostizieren: „Dualität von Erklärung und Prognose“
- Analogieschlüsse: Strukturelle Gemeinsamkeiten erkennen
- Prägnanz
- Leichtere Kommunizierbarkeit
- Kanonisierung und Intersubjektivität

- Umgangssprache ist reicher

- Kann immer alles Wesentliche im Abstraktionsprozess enthalten sein?

- Totalität sozialer Systeme !?
- Problemgerechte, statt universelle Anwendung formaler Methoden
- Zu der sauberen Charakterisierung einer wissenschaftlichen Methode gehört auch eine Spezifikation ihres Gegenstandbereichs.

Formalisierung heißt nicht notwendig

- Quantifizierung

- Legitimierung

- Verabsolutierung

5 Mengenlehre

5.1 Einige grundlegende Begriffe

Definition 5.1. *Menge, Element*

Eine Menge ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte. Die zu einer Menge gehörenden Objekte heißen *Elemente* der Menge.

Bem. 5.2.

- Dabei wird implizit vorausgesetzt, dass für jedes Objekt eindeutig feststellbar sei, ob es zu der Menge gehört oder nicht. (Erweiterung „Fuzzy Sets“). In der Praxis ist die die räumliche, zeitliche und inhaltliche Abgrenzung einer Menge oft schwierig.

- Mengen werden in der Statistik auch benutzt, um den Ausgang von Zufallsexperimenten zu beschreiben.

Darstellung von Mengen

muss eindeutig sein

- aufzählende Darstellung

- beschreibende Darstellung

Bsp. 5.3.

- $M = \{$Hörende dieser Vorlesung$\}$.
- $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (Menge der Ergebnisse eines Würfelwurfs).

  Die Reihenfolge der Aufzählung spielt (im Gegensatz zu Tupeln) keine Rolle:

  $$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 3, 5, 2, 4, 6\}$$

  Jedes Element wird nur einmal genannt.
- $M = \{K, Z\}$ (Menge der Ergebnisse eines Münzwurfs, K=Kopf, Z=Zahl).
- Beschreibende Darstellung: Charakterisierung von Mengen mit einer gewissen Eigenschaft:

  $$\{1, 2, 3, \ldots, 10\} = \{x \,|\, x \text{ ist eine natürliche Zahl } \leq 10\}$$

  Die Menge aller x mit der Eigenschaft „x ist eine natürliche Zahl ≤ 10“.

Definition 5.4. *Variable*

Eine Variable ist eine Bezeichnung (Platzhalter) für ein Objekt, das verschiedene Werte aus einer Menge von Elementen annehmen kann.

Bsp. 5.5.

Variablen repräsentieren z.B

- Zahlen, dann meist mit kleinen lateinischen Buchstaben $a, b, c, \ldots, x, y, z$ bezeichnet

- Mengen, dann meist mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \ldots,\ M, N, O, P$ bezeichnet, auch Ω üblich (s.u.)

- Funktionen, dann meist mit großen oder kleinen lateinischen Buchstaben F, G, H, f, g, h bezeichnet

- spezielle Zahlenmengen, dann meist bezeichnet mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ für natürliche, rationale und reelle Zahlen

Die leere Menge $\varnothing$

Venn-Euler-Diagramme

- Grundmenge als Kasten
- Mengen als darin enthaltene Ovale
- Beziehungen zwischen Mengen symbolisch darstellbar

5.2 Grundlegende Operationen mit Mengen

Illustration anhand Parteien[2]

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\text{CDU/CSU, SPD, AfD, FDP, Grüne, Linke, Sonstige}\} \\ A &= \{\text{CDU/CSU, SPD, FDP, Grüne}\} \\ B &= \{\text{CDU/CSU, SPD, FDP}\} \\ C &= \{\text{SPD, FDP, Grüne}\} \end{aligned}$$

[2] Vgl. Fahrmeir, L., Heumann, C., Künstler, R., Pigeot, I. & Tutz, G. (2016,[8]) Statistik. Der Weg zur Datenanalyse. S.167ff. [Buch auch wieder über UB im Volltext erhältlich]

Elementeigenschaft

x ist Element der Menge M:	$x \in M$
x ist nicht Element der Menge M:	$x \notin M$

Teilmengen

M_1 ist Teilmenge von M_2, in Zeichen $M_1 \subset M_2$, wenn jedes Element von M_1 auch in M_2 ist.

Für jede Menge M gilt:

$\varnothing \subset M$ Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

$M \subset M$ d.h. „ $\subset$ “ enthält implizit „ = “,

deshalb in Literatur manchmal auch $\subseteq$ statt $\subset$ geschrieben

Schnittmenge:

Die Schnittmenge $M_1 \cap M_2$ ist die Menge aller Elemente, die sowohl in M_1 als auch in M_2 enthalten sind:

$$M_1 \cap M_2 = \{x | x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$$

Weitere Eigenschaften

* Gilt $M_1 \subset M_2$, so ist $M_1 \cap M_2 = M_1$.
* Für jede Menge M_1 gilt: $M_1 \cap M_1 = M_1$ und $M_1 \cap \emptyset = \emptyset$.
* Zwei Mengen M_1 und M_2 mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, d.h. zwei Mengen, die kein gemeinsames Element haben, heißen *disjunkt*.
* Die Schnittmenge aus n Mengen $M_1, \ldots, M_n$ enthält alle Elemente, die in jeder der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ enthalten sind und wird bezeichnet mit

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n.$$

Vereinigungsmenge:

Die Vereinigungsmenge $M_1 \cup M_2$ ist die Menge aller Elemente, die in M_1 oder M_2 enthalten sind:

$$M_1 \cup M_2 = \{x | x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$$

Bem. 5.6.

* Vorsicht: Das „oder" ist $nicht$ exklusiv gemeint, also nicht „entweder oder", sondern als „in M_1 oder in M_2 oder in beiden".

* Die Vereinigungsmenge aus n Mengen $M_1, \ldots, M_n$ enthält alle Elemente, die in mindestens einer der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ enthalten sind und wird bezeichnet mit

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$$

Differenzmenge

Die Differenzmenge $M_1 \setminus M_2$ ist die Menge aller Elemente, die in M_1, aber nicht in M_2 enthalten sind:

$$M_1 \setminus M_2 = \{x | x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$$

Komplementärmenge

Die Komplementärmenge $\overline{M}$ bezüglich einer Grundmenge Ω ist die Menge aller Elemente von Ω, die nicht in M sind:

$$\overline{M} = \{x \in \Omega | x \notin M\} = \{x : x \notin M\}$$

Bem. 5.7.

* Die Komplementärmenge ist nur unter Bezugnahme auf eine Grundmenge Ω definierbar.
* Es gilt $\overline{M} = \Omega \setminus M$.
* Es existieren noch weitere Schreibweisen für die Komplementärmenge, z.B. M^C, $\mathcal{C}M$.
* „Tertium non datur" (Grundlegendes Prinzip der Mengenlehre (und der Logik)): Für jedes Element $x \in \Omega$ gilt entweder $x \in M$ oder $x \in \overline{M}$

Potenzmenge

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist die Menge aller Teilmengen von M:

$$\mathcal{P}(M) = \{N | N \subset M\}.$$

$$\mathcal{P}(B) \quad =$$

Mächtigkeit:

Die Mächtigkeit $|M|$ der Menge M ist die Anzahl der Elemente von M

Rechenregeln für Mengen

1. Kommutativgesetze (Vertauschung):

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1, \quad M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1.$$

2. Assoziativgesetze (Zusammenfassen):

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3).$$

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3).$$

3. Distributivgesetze (Ausklammern/Ausmultiplizieren):

$$(M_1 \cup M_2) \cap M_3 = (M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3).$$
$$(M_1 \cap M_2) \cup M_3 = (M_1 \cup M_3) \cap (M_2 \cup M_3).$$

4. De Morgansche Regeln:

$$(\overline{M_1 \cup M_2}) = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$$
$$(\overline{M_1 \cap M_2}) = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$$

5. Aus $M_1 \subset M_2$ folgt $\overline{M_2} \subset \overline{M_1}$.

6. Für die Differenzmenge gilt $M_1 \setminus M_2 = M_1 \cap \overline{M_2}$.

7. Für die Potenzmenge gilt $|\mathcal{P}(M_1)| = 2^{|M_1|}$.

Das kartesische Produkt

Das kartesische Produkt zweier Mengen

$$M = \{m_1, m_2, m_3, \cdots, m_k\}$$
$$N = \{n_1, n_2, n_3, \cdots, n_l\}$$

ist die Menge

$$M \times N := \Big\{(m_i, n_j) \,\Big|\, i = 1, \cdots, k, j = 1, \cdots, l\Big\}$$

Sie besteht also aus allen möglichen Kombinationen, so dass

$$\begin{aligned} M \times N \quad = \quad & \big\{(m_1, n_1), (m_1, n_2), (m_1, n_3), \cdots, (m_1, n_l), \\ & (m_2, n_1), (m_2, n_2), (m_2, n_3), \cdots, (m_2, n_l), \\ & \qquad \vdots \\ & (m_k, n_1), (m_k, n_2), (m_k, n_3), \cdots, (m_k, n_l)\big\} \end{aligned}$$

Bsp. 5.8.

$$
\begin{aligned}
M &= \{1,2,3\} \\
N &= \{1,2,3,4\} \\
M \times N &=
\end{aligned}
$$

Achtung: Bei den Elementen von $M \times N$ handelt es sich um Tupel, das heißt die Reihenfolge ist wichtig! (z.B. $(1,2)$ ist etwas anderes als $(2,1)$.)

Verallgemeinerungen:

- Das kartesische Produkt der Mengen $M_1, M_2, \cdots, M_n$ wird mit

$$\bigtimes_{i=1}^{n} M_i = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$$

bezeichnet und besteht aus allen möglichen n-Tupeln, die sich (unter Beachtung der Reihenfolge) aus Elementen aus $M_1, M_2, \cdots, M_n$ bilden lassen.

- Die Mengen $M_1, M_2, \cdots, M_n$ müssen nicht endlich sein; für endliche Mengen gilt

$$\left| \bigtimes_{i=1}^{n} M \right| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_n|$$

- Kartesische Produkte werden in der Statistik dazu verwendet, um Ergebnisse komplexer Zufallsexperimente aus Einzelexperimenten zusammenzusetzen.