

## 10. Sterbestatistiken

Dr. Felix Heinzl

## Sterberaten

- Rohe Sterberate/Sterbeziffer:

$$m(t) = \frac{S(t)}{\bar{B}(t)}$$

Durchschnittsbevölkerung: Näherungswert für Personenjahre

- Altersspezifische Sterberate/Sterbeziffer:

$$m_x(t) = \frac{S_x(t)}{\bar{B}_x(t)}$$

- Säuglingssterblichkeit:

$$m_0(t) = \frac{S_0(t)}{G(t)}$$

$S(t)$  Anzahl der Sterbefälle im Jahr  $t$ ,

$S_x(t)$  Anzahl der Sterbefälle im Jahr  $t$  von Alter  $x$ ,

$\bar{B}(t)$  Durchschnittliche Bevölkerung im Jahr  $t$ ,

$\bar{B}_x(t)$  Durchschnittliche Bevölkerung im Jahr  $t$  von Alter  $x$ ,

$G(t)$  Anzahl der Lebendgeborenen im Jahr  $t$ .

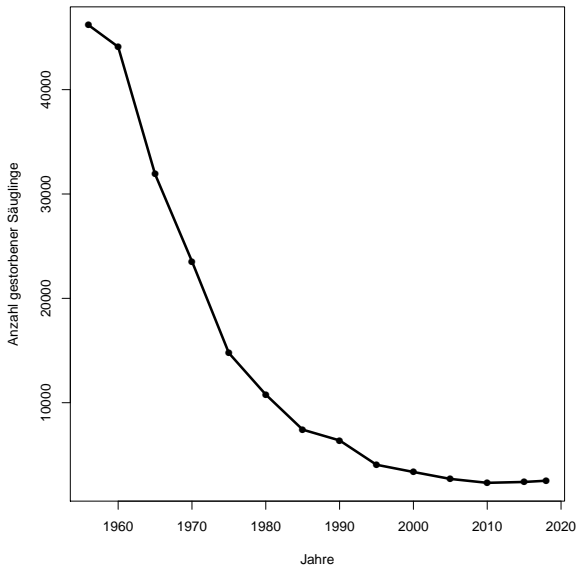


Abbildung 1: Entwicklung der Säuglingssterblichkeit in Deutschland.

## Direkte Standardisierung

Zunächst gilt:

$$m(t) = \sum_x w_x(t) \cdot m_x(t) \quad \text{mit} \quad w_x(t) = \frac{\bar{B}_x(t)}{\bar{B}(t)}$$

- Altersstandardisierte Sterberate:

$$m_{sta}(t) = \sum_x w_x^* \cdot m_x(t) \quad \text{mit} \quad w_x^* = \frac{N_x^*}{\sum_x N_x^*}$$

$N_x^*$	Populationsgröße in der Altersklasse $x$ einer Standardbevölkerung,
$m(t)$	Sterberate im Jahr $t$
$m_x(t)$	Altersspezifische Sterberate im Jahr $t$ von Alter $x$ .
$\bar{B}(t)$	Durchschnittliche Bevölkerung im Jahr $t$ ,
$\bar{B}_x(t)$	Durchschnittliche Bevölkerung im Jahr $t$ von Alter $x$ .

## Indirekte Standardisierung

- Standardisierte Sterberate:

$$smr(t) = \frac{m(t)}{m^*(t)} = \frac{\sum_x w_x(t) \cdot m_x(t)}{\sum_x w_x(t) \cdot m_x^*(t)} \quad \text{mit} \quad w_x(t) = \frac{\bar{B}_x(t)}{\bar{B}(t)}$$

$m^*(t)$  Erwartete Sterberate im Jahr  $t$  von Alter  $x$   
bei einer Vergleichspopulation,

$m_x^*(t)$  Erwartete altersspezifische Sterberate im Jahr  $t$  von Alter  $x$   
bei einer Vergleichspopulation,

$\bar{B}(t)$  Durchschnittliche Bevölkerung im Jahr  $t$ ,

$\bar{B}_x(t)$  Durchschnittliche Bevölkerung im Jahr  $t$  von Alter  $x$ .

## Kohortensterbetafel vs. Periodensterbetafel

### Kohortensterbetafel (Längsschnittbetrachtung):

- Betrachtung einer Kohorte von 100.000 Lebendgeborenen eines Geburtsjahrgangs von der Geburt bis zum Tod.
- Nachteil: Vollständige Bestimmung ist erst möglich, wenn alle Personen dieses Geburtsjahrgangs verstorben sind (zuvor Schätzungen).

### Periodensterbetafel (Querschnittsbetrachtung):

- Betrachtung aller gestorbenen und lebenden Personen aus einem oder mehreren Kalenderjahren
  - ▶ Mehrere Jahre: für zuverlässige Ergebnisse bei Altersgruppen mit wenigen Sterbefällen
  - ▶ In der Regel mindestens 3 Jahre
  - ▶ Im betrachteten Zeitraum sollten keine außergewöhnlichen Ereignisse stattgefunden haben (z.B. starke Grippewelle)
- Annahme: konstante Sterblichkeitsverhältnisse
- Vorteil: Aktuell und verfügbar

⇒ In der Regel werden Periodensterbetafel verwendet!

Quelle: Eisenmenger and Emmerling (2011)

## Allgemeine Sterbetafel vs. laufende Sterbetafel

### Laufende Sterbetafel:

- Bestimmung auch zwischen Volkszählungen möglich
- Datenbasis: Ergebnisse der Bevölkerungsfortschreibung
- Berechnungsart: Periodensterbetafel

### Allgemeine Sterbetafel:

- Bestimmung nur im Anschluss an einen Zensus
- Datenbasis: Zensusdaten (z.B. Sterbetafel für den Zeitraum 2010/2012 auf Basis der Zensusergebnisse vom 9.5.2011)
- Berechnungsart: Periodensterbetafel

## Sterbetafel: Notation

- $q_x$  Wahrscheinlichkeit eines  $x$ -Jährigen zwischen seinem  $x$ -ten und  $(x+1)$ -ten Geburtstag zu sterben,
- $p_x$  Wahrscheinlichkeit eines  $x$ -Jährigen zwischen seinem  $x$ -ten und  $(x+1)$ -ten Geburtstag nicht zu sterben,
- $l_x$  Anzahl der an ihrem  $x$ -ten Geburtstag noch Lebenden,
- $d_x$  Anzahl der im Alter  $x$  Gestorbenen,
- $L_x$  Summe an Jahren, die die an ihrem  $x$ -ten Geburtstag noch Lebenden bis zum Alter  $x+1$  durchleben,
- $T_x$  Summe an Jahren, die die an ihrem  $x$ -ten Geburtstag noch Lebenden leben,
- $e_x$  Durchschnittliche Restlebenserwartung der an ihrem  $x$ -ten Geburtstag noch Lebenden.



## Berechnung der Variablen der Sterbetafel

Ausgangspunkt: altersspezifische Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_x$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad p_x &= 1 - q_x \\ l_x &= l_{x-1} \cdot p_{x-1}, \quad x \geq 1, \quad l_0 = 100.000 \\ d_x &= l_x \cdot q_x = l_x - l_{x+1} \\ L_x &= l_{x+1} + 0.5 \cdot d_x, \quad x \geq 1 \\ T_x &= \sum_{y \geq x} L_y \\ e_x &= \frac{T_x}{l_x}\end{aligned}$$

Alter	$q_x$	$p_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
0	0,00356226	0,99643774	100000	356	99692	7847962	78,48
1	0,00027641	0,99972359	99644	28	99630	7748270	77,76
2	0,00015611	0,99984389	99616	16	99608	7648640	76,78
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
24	0,00047486	0,99952514	99175	47	99152	5460312	55,06
25	0,00043792	0,99956208	99128	43	99107	5361160	54,08
26	0,00045886	0,99954114	99085	45	99062	5262054	53,11
27	0,00046183	0,99953817	99039	46	99017	5162992	52,13
28	0,00048486	0,99951514	98994	48	98970	5063975	51,15
29	0,00052165	0,99947835	98946	52	98920	4965006	50,18
30	0,00056139	0,99943861	98894	56	98866	4866086	49,21
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
80	0,05642286	0,94357714	55150	3112	53594	441007	8,00
81	0,06453153	0,93546847	52038	3358	50359	387413	7,44
82	0,07265536	0,92734464	48680	3537	46912	337054	6,92
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabelle 1: Sterbetafel 2016/2018 der Männer in Deutschland.

Alter	$q_x$	$p_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$T_x$	$e_x$
0	0,00300534	0,99699466	100000	301	99741	8326646	83,27
1	0,00024794	0,99975206	99699	25	99687	8226904	82,52
2	0,00012423	0,99987577	99675	12	99669	8127217	81,54
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
24	0,00017994	0,99982006	99421	18	99412	5936703	59,71
25	0,00019022	0,99980978	99403	19	99394	5837291	58,72
26	0,00018820	0,99981180	99384	19	99375	5737897	57,73
27	0,00021518	0,99978482	99366	21	99355	5638522	56,75
28	0,00023564	0,99976436	99344	23	99332	5539167	55,76
29	0,00025877	0,99974123	99321	26	99308	5439835	54,77
30	0,00031713	0,99968287	99295	31	99279	5340527	53,78
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
80	0,03646149	0,96353851	71527	2608	70223	679187	9,50
81	0,04267387	0,95732613	68919	2941	67448	608964	8,84
82	0,04937895	0,95062105	65978	3258	64349	541516	8,21
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Tabelle 2: Sterbetafel 2016/2018 der Frauen in Deutschland.

## Methoden zur Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeiten

- **Laufende Sterbetafel:**

Seit 1957/1958 (Beginn der Bevölkerungsfortschreibung):  
Sterbeziffernmethode nach Farr

- **Allgemeine Sterbetafel:**

Zeitraum	Berechnungsmethode der Sterbewahrscheinlichkeiten
1871/1881	Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner
1881/1890	Sterbejahrmethode nach Rath
1891/1900	Sterbejahrmethode nach Rath
1901/1910	Sterbejahrmethode nach Rath
1910/1911	Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner
1924/1926	Sterbejahrmethode nach Rath
1932/1934	Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner
1949/1951	Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner
1960/1962	Sterbejahrmethode nach Rath
1970/1972	Sterbeziffernmethode nach Farr
1986/1988	Sterbeziffernmethode nach Farr
2010/2012	Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner

Tabelle 3: Quelle: Statistisches Bundesamt (2019).

## Schätzung von rohen altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten

### 1 Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner

- ▶ Berücksichtigung aller Sterbefälle eines bzw. mehrerer Geburtsjahrgänge,

### 2 Sterbejahrmethode von Raths



- ▶ Berücksichtigung aller Sterbefälle im Beobachtungszeitraum, die sich auf zwei oder mehrere Geburtsjahrgänge verteilen,

### 3 Sterbeziffernmethode nach Farr

- ▶ Umrechnung der altersspezifischen Sterbeziffern auf Sterbewahrscheinlichkeiten:

$$q_x = \frac{S_x}{\bar{B}_x + \frac{S_x}{2}} = \frac{m_x}{1 + \frac{m_x}{2}} \quad \text{mit} \quad m_x = \frac{S_x}{\bar{B}_x},$$

- ▶ Annahme: Gleichmäßige Verteilung der Sterbefälle über das ganze Jahr  
 ⇒ für Bestimmung der Säuglingssterblichkeit ungeeignet  
 ⇒ Berechnung nur näherungsweise
- ▶ Wanderungen implizit berücksichtigt.

 = Sterbefälle  
 = Referenzpopulation

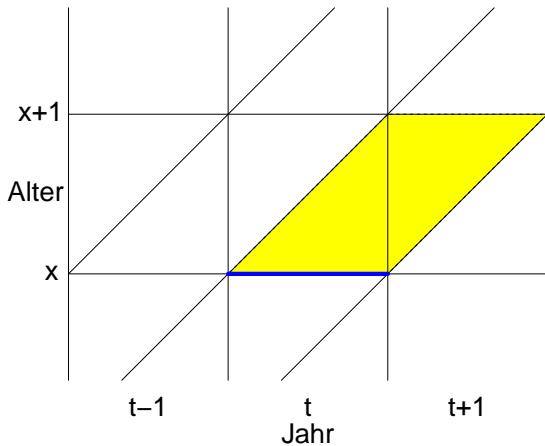




Abbildung 2: Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner im Lexis-Diagramm.

 = Sterbefälle  
 = Referenzpopulation

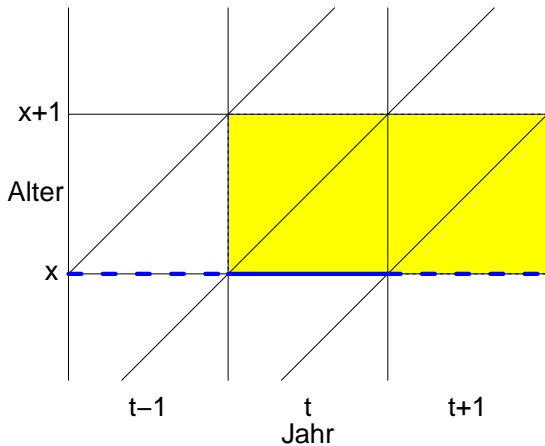




Abbildung 3: Sterbejahrmethode nach Raths im Lexis-Diagramm.

 = Sterbefälle  
 = Referenzpopulation

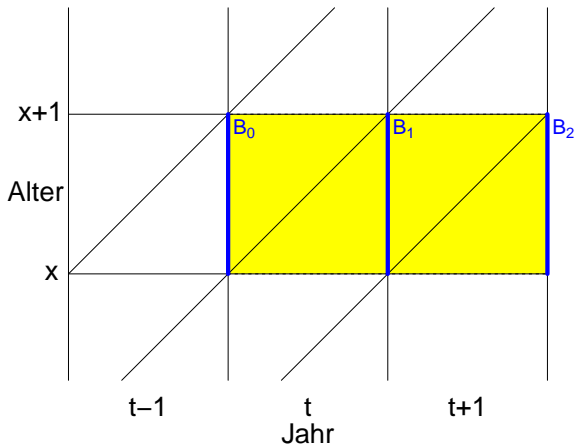


Abbildung 4: Sterbeziffernmethod nach Farr im Lexis-Diagramm.



## Berechnung der Sterbetafel 2010/2012 für Alter $x > 0$

- Berechnungsidee gemäß **Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner**:

$$q_x = \frac{S_{ABEF} + S_{BCDE}}{P_{AB} + P_{BC}}$$

- Berechnung über Zensusbestände:

$$q_x = \frac{S_{ABEF} + S_{BCDE}}{P_{GK} + P_{KL} + S_{AHL} - S_{GCH}}$$

$S_{ABEF}$

Sterbefälle im Vieleck  $ABEF$ ,

$P_{AB}$

Lebende Personen entlang der Linie  $AB$ .

Quelle: Statistisches Bundesamt (2015)

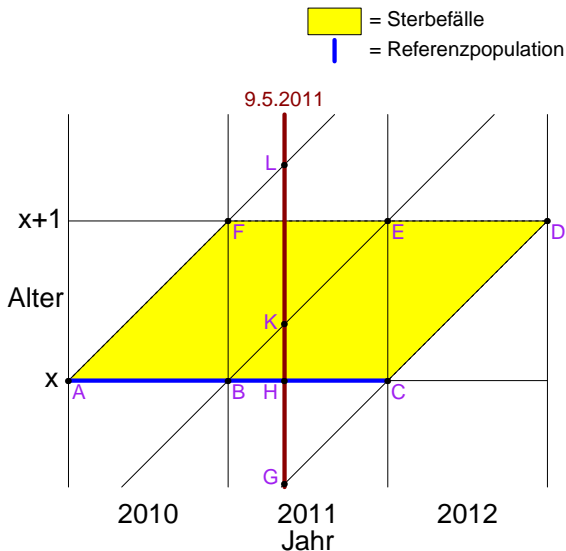


Abbildung 5: Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner für Alter  $x > 0$  bei der Sterbetafel 2010/2012.

## Berechnung der Sterbetafel 2010/2012 für Alter $x = 0$

- Berechnungsidee gemäß **Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner**
- Keine Berechnung über Zensusbestände notwendig, sondern direkt aus der Statistik der Lebendgeborenen
- Erweiterung des Beobachtungszeitraums auf 2009 – 2013

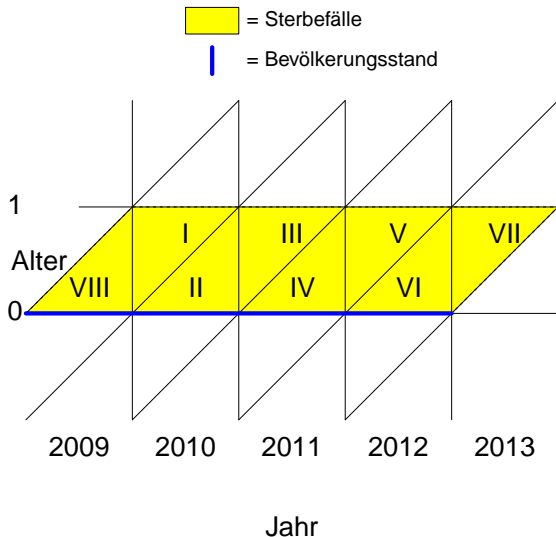
⇒

$$q_0 = \frac{S_I + S_{II} + S_{III} + S_{IV} + S_V + S_{VI} + S_{VII} + S_{VIII}}{G(2009) + G(2010) + G(2011) + G(2012)}$$

$S_I$  Sterbefälle im Vieleck  $I$ ,

$G(t)$  Anzahl der Lebendgeborenen im Jahr  $t$ .

Quelle: Statistisches Bundesamt (2015)



**Abbildung 6:** Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner für Alter  $x = 0$  bei der Sterbetafel 2010/2012.

## Berechnung der Sterbetafel 2016/2018

- Alter  $x > 0$ : Berechnung: **Sterbeziffernmethode nach Farr**

Sterbefälle im Alter  $x$ :

$$S_x = S_I + S_{II} + S_{III} + S_{IV} + S_V + S_{VI}$$

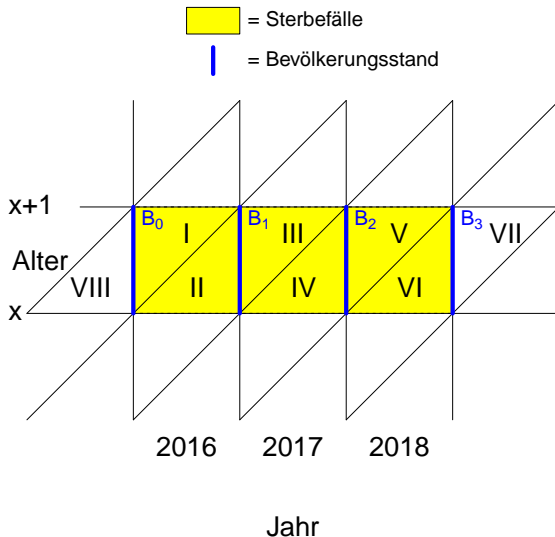
⇒ Altersspezifische Sterbewahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{S_x}{\frac{B_0+B_1}{2} + \frac{B_1+B_2}{2} + \frac{B_2+B_3}{2} + \frac{S_x}{2}} \\ &= \frac{S_x}{\frac{B_0}{2} + B_1 + B_2 + \frac{B_3}{2} + \frac{S_x}{2}} \end{aligned}$$

Annahme:  $S_I = S_{VIII}$  und  $S_{VI} = S_{VII}$

- Alter  $x = 0$ : **Sterbejahrmethode nach Raths:**
  - ▶ Direkte Verwendung der Statistik der Lebengeborenen.
  - ▶ In einem komplexen Verfahren gehen die monatsgenauen Geburten- und Sterbefälle in die Berechnung ein.

Quelle: Statistisches Bundesamt (2019)



**Abbildung 7:** Sterbeziffernmethode nach Farr für Alter  $x > 0$  bei der Sterbetafel 2016/2018 (Statistisches Bundesamt, 2019).

## Ausgleich der rohen $q_x$

### Probleme und Gegenmaßnahmen:

- Kein kontinuierlich glatter Verlauf der rohen  $q_x$ 
  - ▶ Früher: Bereinigung von Zufallsschwankungen z.B. durch P-Splines
- Teilweise unplausible Verläufe der  $q_x$ 
  - ▶ Ersetzung unplausibler Werte durch Anwendung von Logitmodellen
- Geringe Fallzahlen in hohen Altersstufen
  - ▶ Extrapolationsmodelle notwendig

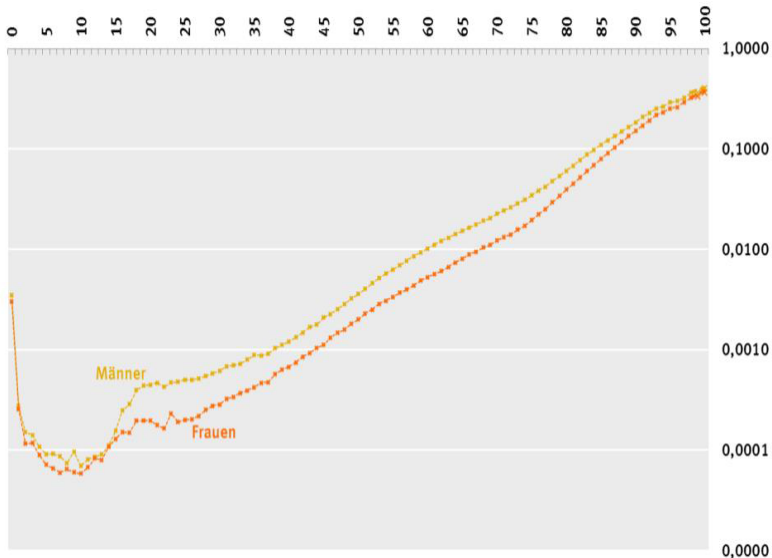


Abbildung 8: Altersspezifische Sterbewahrscheinlichkeiten für Deutschland 2013/15 (log. Maßstab) (Statistisches Bundesamt, 2016).



## Entwicklung der Lebenserwartung in Deutschland

- Über Jahrtausende hinweg keine wesentliche Veränderung der Lebenserwartung
- Lebenserwartung bei Geburt für 1871/1881:
  - ▶ Männer: 35,6 Jahre,
  - ▶ Frauen: 38,4 Jahre,
- Seit Ende des 19. Jhds. drastischer Rückgang insbesondere der Säuglings- und Seniorensterblichkeit ⇒ Konzentration des Sterbealters auf 70. bis 80. Lebensjahr,
- Gründe für steigende Lebenserwartung: Verbesserung der
  - ▶ medizinischen Versorgung,
  - ▶ Hygiene,
  - ▶ Ernährung,
  - ▶ Wohnsituation,
  - ▶ Arbeitsbedingungen.
- Lebenserwartung bei Geburt für 2016/2018:
  - ▶ Männer: 78,5 Jahre,
  - ▶ Frauen: 83,3 Jahre.

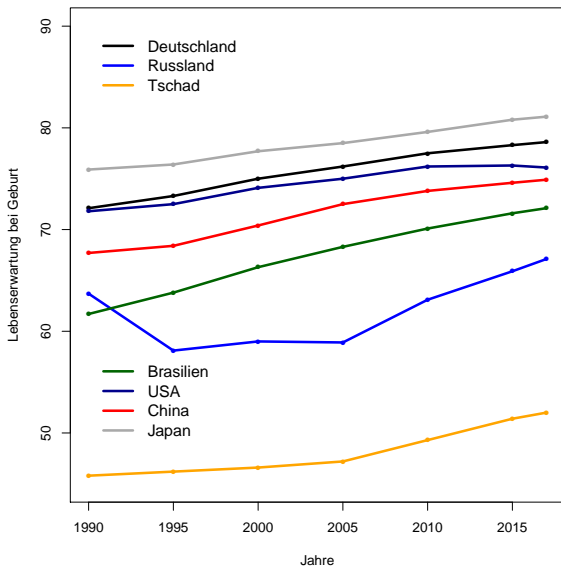


Abbildung 9: Lebenserwartung der Männer bei Geburt für ausgewählte Länder.

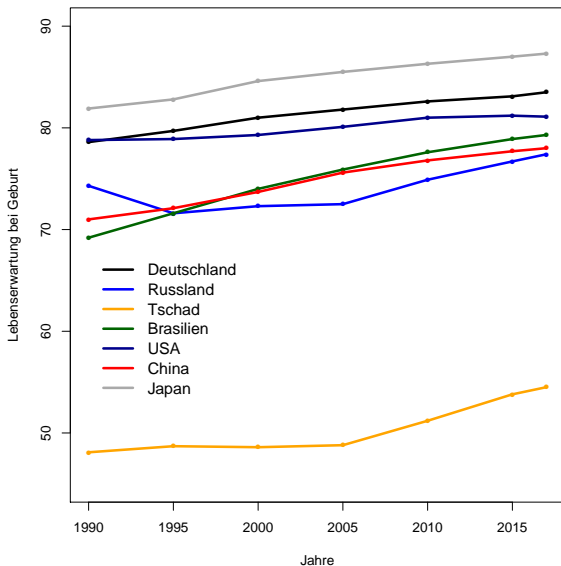


Abbildung 10: Lebenserwartung der Frauen bei Geburt für ausgewählte Länder.

## Zugang zu bundesweiten bzw. internationalen Daten

- <https://www-genesis.destatis.de/genesis/online>
  - ↪ Suchbegriff Säuglingssterblichkeit
    - ▶ Gestorbene: Deutschland, Jahre, Geschlecht, Altersjahre (Abbildung 1)
  - ↪ Suchbegriff Sterbetafel
    - ▶ Sterbetafel: Deutschland, Jahre, Geschlecht, Vollendetes Alter (Tabelle 1, Tabelle 2)
  - ↪ Suchbegriff Lebenserwartung
    - ▶ Internationale Indikatoren - Gebiet und Bevölkerung: Staaten, Jahre (Abbildung 9, Abbildung 10)

## Quellen

- Eisenmenger, M. and D. Emmerling (2011). Amtliche Sterbetafeln und Entwicklung der Sterblichkeit. In *Wirtschaft und Statistik*, Volume 3, pp. 219–238. Wiesbaden: Statistisches Bundesamt.
- Statistisches Bundesamt (2015). *Sterbetafel 2010/2012*. Wiesbaden: Statistisches Bundesamt.
- Statistisches Bundesamt (2016). *Sterbetafel 2013/2015*. Wiesbaden: Statistisches Bundesamt.
- Statistisches Bundesamt (2019). *Sterbetafel 2016/2018*. Wiesbaden: Statistisches Bundesamt.  
<https://www.destatis.de/DE/Themen/Gesellschaft-Umwelt/Bevoelkerung/Sterbefaelle-Lebenserwartung/Publikationen/Downloads-Sterbefaelle/periodensterbetafel-erlaeuterung-5126203187004.pdf>.