

Der Funktionsbegriff und elementare Kurvendiskussion

Christoph Jansen

Institut für Statistik, LMU München

Formalisierungspropädeutikum



6. Oktober 2017

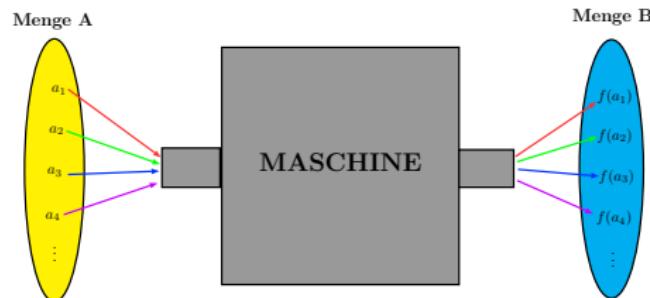
Allgemeiner Funktionsbegriff

Eine **Funktion** f ist eine Abbildungsvorschrift, die jedem Element a einer (nicht-leeren) Menge A eindeutig ein Element $f(a)$ einer (nicht-leeren) Menge B zuordnet.

Formal schreiben wir hierfür:

$$f : A \rightarrow B , \quad a \mapsto f(a)$$

Beliebte Veranschaulichung: **Die Funktion als Maschine**



Aus jedem Rohstoff $a \in A$ wird das Produkt $f(a) \in B$ hergestellt.

Einige Grundbegriffe (I)

Sei nun $f : A \rightarrow B$ eine Funktion.

Zum Beispiel: $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$, $x \mapsto 2x$

- A heißt **Definitionsbereich** der Funktion f , kurz: \mathbb{D}_f .

Im Beispiel: $\mathbb{D}_f = \{1, 2, 3, 4\}$

- B heißt **Wertebereich** der Funktion f , kurz: \mathbb{W}_f .

Im Beispiel: $\mathbb{W}_f = \{1, 2, \dots, 10\}$

- $f(A) := \{f(a) : a \in A\} \subset B$ heißt **Bild** der Funktion f .

Im Beispiel: $f(\{1, 2, 3, 4\}) = \{2, 4, 6, 8\}$

- $G_f := \{(a, f(a)) : a \in A\} \subset A \times B$ heißt **Graph** der Funktion f .

Im Beispiel: $G_f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$

- Für $M \subset B$ heißt $f^{-1}(M) := \{a \in A : f(a) \in M\}$ das **Urbild** der Menge M unter der Funktion f .

Im Beispiel: Für $M = \{2, 8\}$ gilt $f^{-1}(M) = \{1, 4\}$

Einige Grunbegriffe (II)

- Die Funktion f heißt **konstant**, falls es ein $b \in B$ gibt, sodass $f(a) = b$ für alle $a \in A$ gilt. Die Funktion ordnet also jedem Element der Definitionsmenge den gleichen Wert zu.

- f heißt **injektiv**, falls alle $a_1, a_2 \in A$ die $f(a_1) = f(a_2)$ erfüllen, auch $a_1 = a_2$ erfüllen. f heißt **surjektiv**, falls für alle $b \in B$ ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ existiert. Ist f injektiv und surjektiv, so nennt man f **bijektiv**.

Im Beispiel: f ist injektiv, aber nicht surjektiv (und damit nicht bijektiv).

- Für zwei Funktionen $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$, definieren wir die **Komposition** (oder: **Verknüpfung**) $g \circ f$ als die Funktion

$$g \circ f : A \rightarrow C, \quad a \mapsto g(f(a))$$

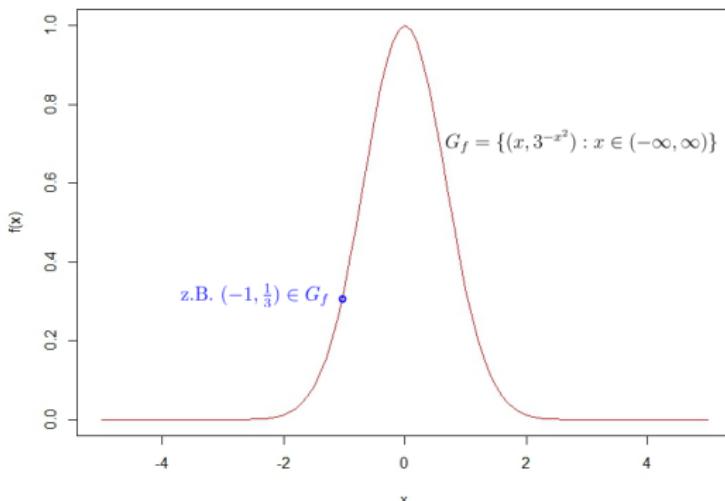
Anschaulich: Zuerst stellt Maschine f aus dem Rohstoff a das Zwischenprodukt $f(a)$ her, welches Maschine g dann zum Endprodukt $g(f(a))$ weiterverarbeitet.

Vorsicht: Nicht alle Funktionen lassen sich verknüpfen (beachte implizite Voraussetzung $\mathbb{W}_f = \mathbb{D}_g$)!

Grundbegriffe für reelle Funktionen (I)

- Funktionen mit $A \subset \mathbb{R}$ und $B = \mathbb{R}$ nennen wir **reelle Funktionen**. Häufig interessieren uns hierbei die Fälle $A = \mathbb{R}$ oder $A = \mathbb{R}^+$.
- Für eine reelle Funktion f bietet der Graph G_f eine bereits aus der Schule bekannte **Visualisierungsmöglichkeit**:

Beispiel: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := 3^{-x^2}$

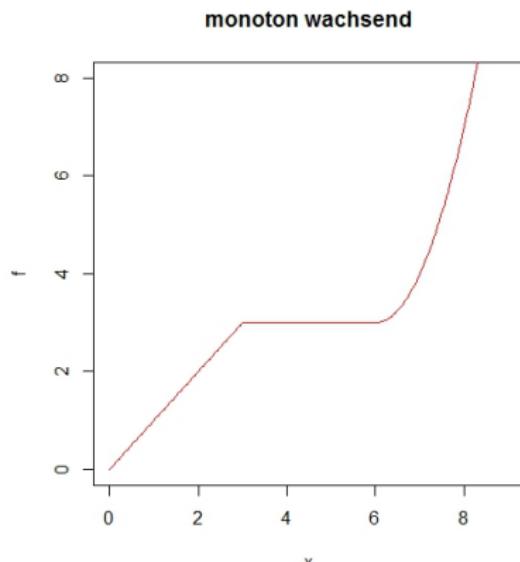
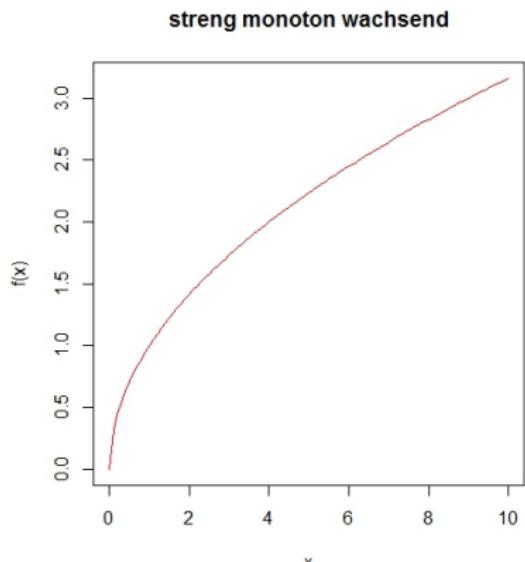


Grundbegriffe für reelle Funktionen (II)

Sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

- f heißt **monoton wachsend** (bzw. **streng monoton wachsend**), falls für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) < f(x_2)$)

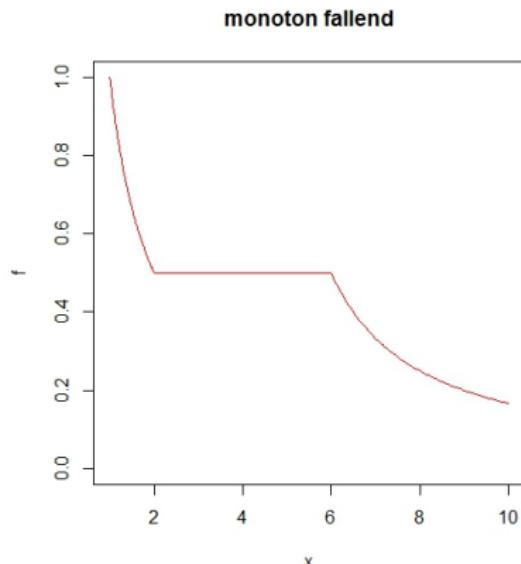
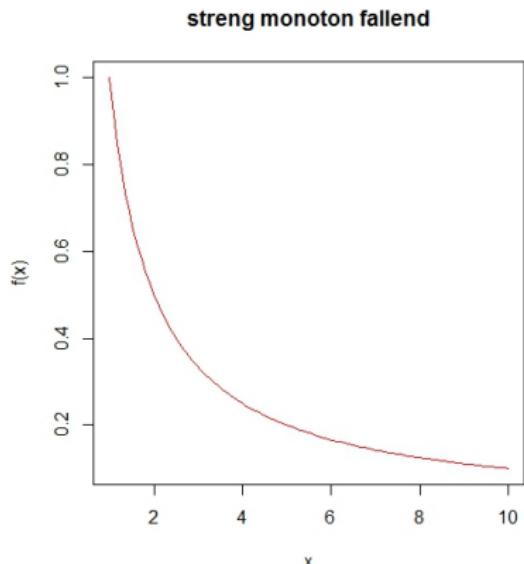
Zum Beispiel:



Grundbegriffe für reelle Funktionen (III)

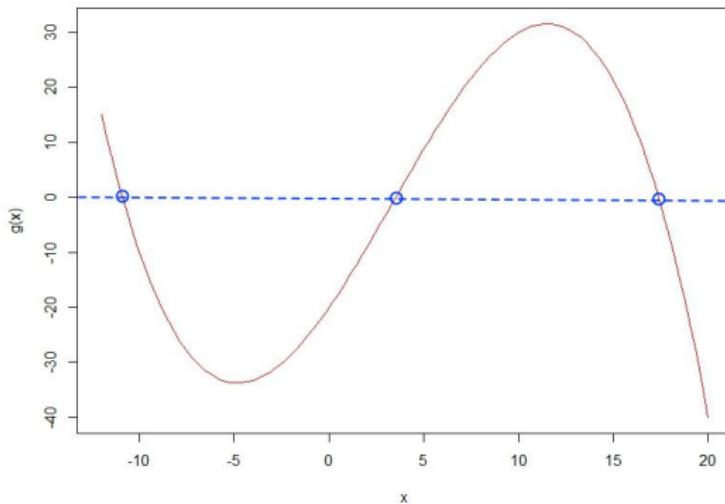
- f heißt **monoton fallend** (bzw. **streng monoton fallend**), falls für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) > f(x_2)$)

Zum Beispiel:



- Jeder Wert $x_z \in A$ mit $f(x_z) = 0$ heißt Nullstelle von f .

Zum Beispiel:



Anschaulich entsprechen die Nullstellen der Funktion f also gerade den Schnittpunkten des Graphen G_f mit der x -Achse des Koordinatensystems.

Spezielle reelle Funktionen (I): Polynomfunktionen

Seien $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Dann heißt jede Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} , \quad x \mapsto f(x) := \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$$

Polynomfunktion n -ten Grades.

Da der Definitionsbereich und der Wertebereich jeweils ganz \mathbb{R} ist, geben wir für Polynomfunktionen häufig nur den Funktionsterm $f(x)$ an.

Einige Beispiele:

1.) $n = 27$, $a_{27} = 42$, $a_{26} = \dots = a_2 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_0 = 8$. Dann:

$$f(x) := 42x^{27} + x + 8$$

2.) $n = 3$, $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 3$, $a_1 = 1$ und $a_0 = 5$. Dann:

$$f(x) := -\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + x + 5$$

Die Fall $n = 1$: Lineare Funktionen

- Polynomfunktionen 1. Grades bezeichnet man auch als **lineare Funktionen**; sie haben die Form $f(x) := a_1x + a_0$.
- Den Wert a_1 bezeichnen wir als **Steigung** der linearen Funktion, den Wert a_0 als ihren **y-Achsenabschnitt**.
- Die eindeutige Nullstelle x_z einer linearen Funktion erhält man als Lösung der Gleichung $f(x) = 0$. Es ergibt sich: $x_z = \frac{-a_0}{a_1}$
- Lineare Funktionen sind streng monoton wachsend, falls $a_1 > 0$ und streng monoton fallend, falls $a_1 < 0$. Wäre $a_1 = 0$, so ist die Funktion konstant. Dies ist dann aber per Definition keine lineare Funktion mehr!
- Den Graphen einer linearen Funktion bezeichnet man auch als **Gerade**.

Die Fall $n = 2$: Quadratische Funktionen

- Polynomfunktionen 2. Grades bezeichnet man auch als **quadratische Funktionen**; sie haben die Form $f(x) := a_2x^2 + a_1x + a_0$.
- Die Nullstelle einer quadratischen Funktion erhält man als Lösung der Gleichung $f(x) = 0$; sie kann 0, 1 oder 2 Nullstellen besitzen.
- Die (potentiellen) Nullstellen x_1, x_2 lassen sich mit Hilfe der **Mitternachtsformel** berechnen:

$$x_{1/2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

- Den Graphen einer quadratischen Funktion bezeichnet man auch als **Parabel**.
- ist $a_2 > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet, gilt $a_2 < 0$, so ist sie nach unten geöffnet.

Exkurs: Methode der quadratischen Ergänzung und Herleitung der Mitternachtsformel

Spezielle reelle Funktionen (II): Exponentialfunktionen

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ und $a \neq 0$. Dann heißt jede reelle Funktion der Form

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} , \quad x \mapsto f(x) := a \cdot b^x + c$$

Exponentialfunktion.

Da der Definitionsbereich und der Wertebereich jeweils ganz \mathbb{R} ist, geben wir für Exponentialfunktionen häufig nur den Funktionsterm $f(x)$ an.

Bemerkungen:

- Das Bild $f(\mathbb{R})$ einer Exponentialfunktion entspricht gerade $[c; \infty)$, falls $a > 0$ und $(-\infty; c]$, falls $a < 0$.
- Das Monotonieverhalten von Exponentialfunktion lässt sich durch folgende Tabelle zusammenfassen:

	$a < 0$	$a > 0$
$b \in (0; 1)$	f streng monoton steigend	f streng monoton fallend
$b \in (1; \infty)$	f streng monoton fallend	f streng monoton steigend

Ein kleiner Beweis...

Wie kann man die Monotonietabelle nachweisen?

Voraussetzung: Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gegeben.

Folgerung: Es gibt ein $\lambda > 1$ mit $\lambda \cdot x_1 = x_2$.

Berechne nun die Ausdrücke

$$f(x_1) = a \cdot b^{x_1} + c \quad \text{und} \quad f(x_2) = a \cdot b^{x_2} + c$$

und betrachte die Differenz

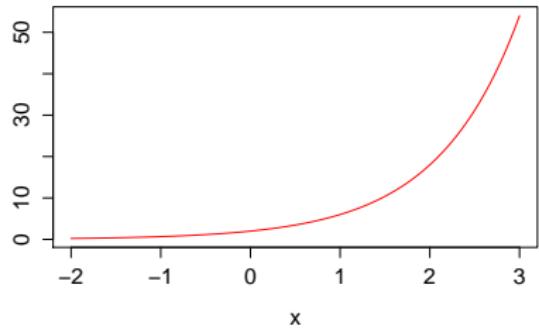
$$\Delta(a, b) := f(x_2) - f(x_1) = a \cdot (b^{x_2} - b^{x_1}) = a \cdot (b^{\lambda \cdot x_1} - b^{x_1}) = a \cdot b^{x_1} \cdot (b^\lambda - 1)$$

Dann gilt:

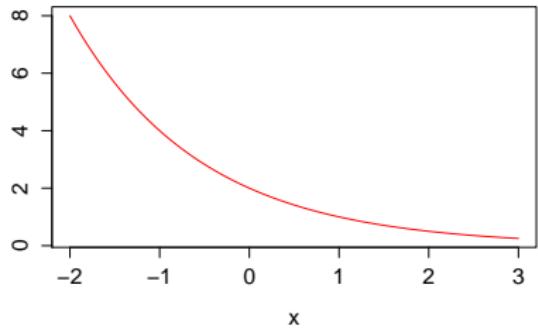
$$\Delta(a, b) \text{ ist } \begin{cases} > 0 & , \text{ falls } a > 0, b > 1 \\ < 0 & , \text{ falls } a > 0, b \in (0; 1) \\ > 0 & , \text{ falls } a < 0, b > 1 \\ > 0 & , \text{ falls } a < 0, b \in (0; 1) \end{cases}$$

Einige Beispielgraphen

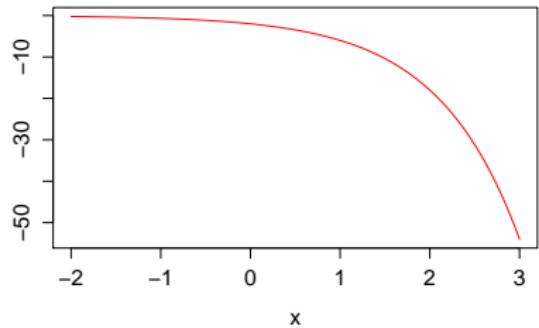
a=2 und b=3



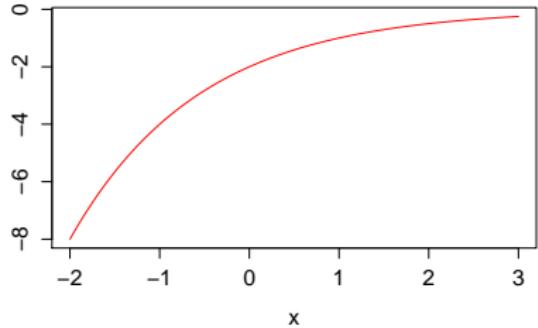
a=2 und b=0.5



a=-2 und b=3



a=-2 und b=0.5



Exkurs: Exponentieller Zerfall

Auf einem **vernünftig gezapften Bier** befinden sich unmittelbar nach dem Zapfen 4.5 cm Schaum. Nach ca. 77 Sekunden zerfällt jeweils die Hälfte des vorhandenen Schaumes (d.h. die Höhe der Schaumkrone verringert sich um die Hälfte).

Wie lässt sich dieser Zusammenhang formal durch eine Funktion beschreiben?

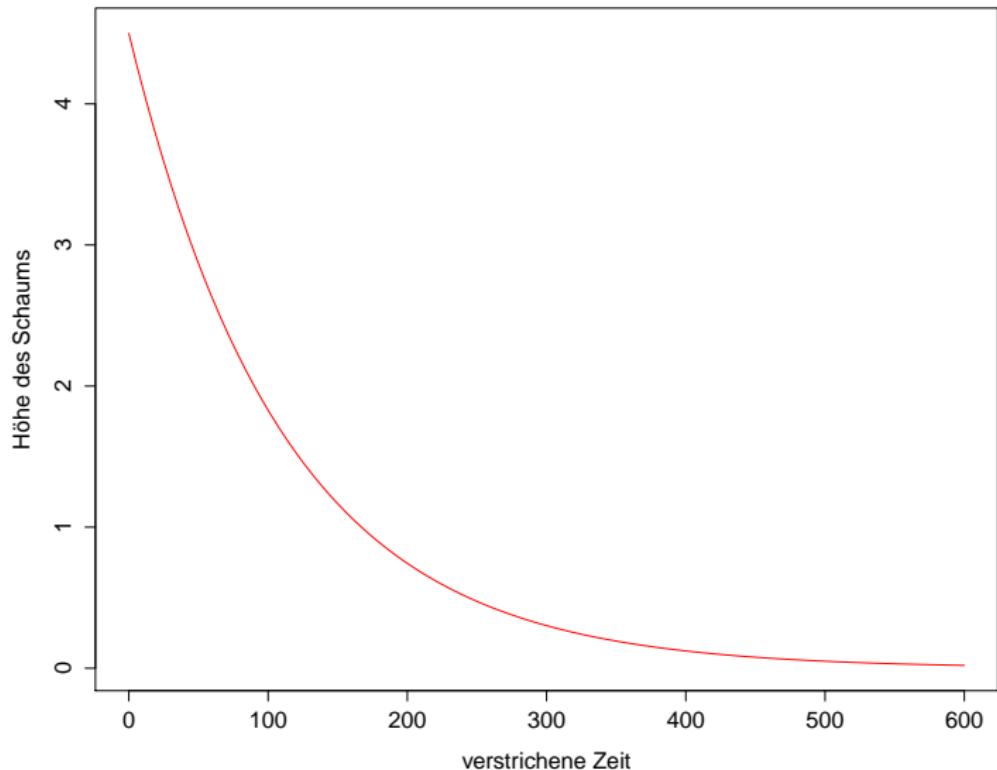
Bezeichne t die nach dem Zapfen verstrichene Zeit in s. Dann befinden sich für

- 77 Sekunden noch 2.25 cm Schaum auf dem Bier
- 144 Sekunden noch 1.125 cm Schaum auf dem Bier
- t Sekunden noch $4.5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{77}}$ cm auf dem Bier

⇒ Höhe des Bierschaums nach t Sekunden gegeben durch

$$f(t) = 4.5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{77}} \approx 4.5 \cdot 0.991^t$$

Graph der Zerfallsfunktion



Weitere häufig benutzte Funktionen

- **Logarithmusfunktion:** Sei $b \in \mathbb{R}^+$. Dann heißt jede Funktion der Form

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} , \quad x \mapsto f(x) := \log_b(x)$$

Logarithmusfunktion zur Basis b . Populäre Wahl: Basis $b := e$.

- **Trigonometrische Funktionen:** Die Funktionen

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] , \quad x \mapsto \sin(x)$$

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] , \quad x \mapsto \cos(x)$$

heißen **trigonometrische Funktionen**. Idee: Verallgemeinerung der für rechtwinklige Dreiecke definierten Maßzahlen auf beliebige Winkel.

Steigung einer Funktion

Für lineare Funktionen haben wir den Begriff der **Steigung** eingeführt. Wie lässt sich dieser Begriff auf andere Funktionen verallgemeinern?

Intuitives Problem: Nicht-lineare Funktionen haben keine konstante Steigung!

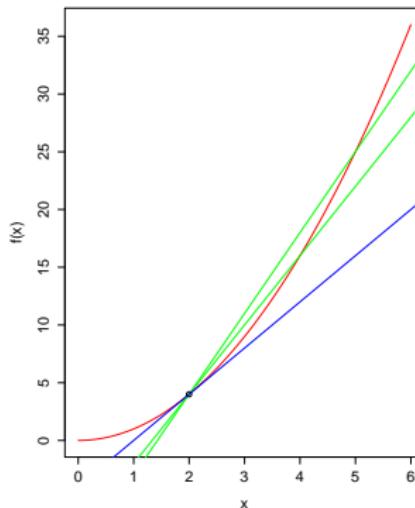
Informelle Idee: Definiere die Steigung einer Funktion f an der Stelle a als Steigung der **Tangentialgeraden** an den Punkt $(a, f(a))$. So entsteht eine neue Funktion, die jedem $x \in \mathbb{D}_f$ die entsprechende Tangentensteigung zuordnet. Wir nennen diese Funktion die **Ableitung** von f und notieren sie mit f' .

Vorsicht: Nicht jede Funktion besitzt eine Ableitung (z.B. Betragsfunktion)!! Die Steigung der Tangente an einen bestimmten Punkt könnte nicht eindeutig sein!

Gute Nachricht: Zu vielen üblichen Funktionen existieren Ableitungen (Polynomfunktionen, Exponentialfunktionen, ...). Es lassen sich häufig sogar explizit Formeln zur Berechnung angeben (→ später)!

Bestimmung der Steigung in einem Punkt

Man betrachte das folgende Beispiel:



$f'(2)$ entspricht gerade der Steigung der blauen Geraden. Analog könnte für jeden anderen Wert $x \in \mathbb{R}$ vorgegangen werden. Es entsteht die Funktion $f'(x)$.

Allgemeine Ableitungsregeln (I)

Seien $A, B, C \subset \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Regeln:

- **Summenregel:** Sind $f, g : A \rightarrow B$ zwei Funktionen mit existierenden Ableitungen f', g' , so existiert die Ableitung der Summenfunktion $f + g$ und es gilt für alle $x \in A$:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

- **Produktregel:** Sind $f, g : A \rightarrow B$ zwei Funktionen mit existierenden Ableitungen f', g' , so existiert die Ableitung der Produktfunktion $f \cdot g$ und es gilt für alle $x \in A$:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- **Quotientenregel:** Sind $f, g : A \rightarrow B$ zwei Funktionen mit existierenden Ableitungen f', g' und gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in A$, so existiert die Ableitung der Quotientenfunktion $\frac{f}{g}$ und es gilt für alle $x \in A$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

- **Kettenregel:** Sind $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ zwei Funktionen mit existierenden Ableitungen f', g' , so existiert die Ableitung der Komposition $g \circ f$ und es gilt für alle $x \in A$:

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)$$

Spezielle Ableitungsregeln

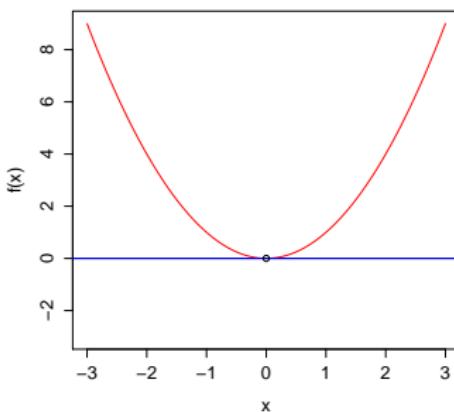
Die gerade kennengelernten allgemeinen Regeln erlauben uns die Ableitungen zusammengesetzter Funktionen auf die Ableitungen ihrer Bausteine **zurückzuführen**.

Ihre Anwendung erfordert also die Kenntnis der Ableitungen der Grundfunktionen:

- **Potenzfunktion:** Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann hat die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$ die Ableitung $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a \cdot x^{a-1}$.
- **Logarithmusfunktion:** Sei $b \in \mathbb{R}^+$. Dann hat die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_b(x)$ die Ableitung $f' : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x \cdot \ln(b)}$.
- **Exponentialfunktion:** Sei $b \in \mathbb{R}^+$. Dann hat die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto b^x$ die Ableitung $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(b) \cdot b^x$.

Optimierungsaufgaben

Mithilfe ihrer Ableitungsfunktion lassen sich **lokale Extremwerte** von Funktionen bestimmen. Dieser Zusammenhang wird sich in **Optimierungsaufgaben** zu Nutze gemacht.



Zusammenhang: Hat die Ableitung f' eine Nullstelle bei x_z , so ist x_z ein Kandidat für eine lokales Extremum der ursprünglichen Funktion f .

Genauer gelten die folgenden Zusammenhänge.

Seien $f, f' : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann:

- Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b] \subset A$, so ist f auf $[a, b]$ streng monoton steigend.
- Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b] \subset A$, so ist f auf $[a, b]$ streng monoton fallend.

Fundamentalzusammenhang für Kurvendiskussion!!