Mathe Warm-Up, Teil 1 [1] [2]

HEUTE:

1. Elementare Rechenoperationen: Brüche, Potenzen, Logarithmus, Wurzeln
2. Summen- und Produktzeichen
3. Gleichungen/Ungleichungen

[1] orientiert sich an den Kapiteln 3,4,6,8 des Buches: Vorkurs Mathematik, Erhard Cramer, Johanna Nešlehová, Springer

[2] Bitte beachten Sie: Dieses Handout kann Fehler enthalten und befindet sich noch in der Überarbeitung.

1 ELEMENTARE RECHENOPs

1.1 Rechnen mit Brüchen

		Tipps, Tricks, Beispiel(e):
Erweitern und Kürzen	Es gilt für Zahlen $a,\ b \neq 0,\ c \neq 0$: $$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{c \cdot b}$$ $\xLeftarrow{\text{Kürzen}}$ $\xRightarrow{\text{Erweitern}}$	So kanns einfacher werden: Trick 1: Faktorisieren $$\frac{72xy^2 - 45x^2y}{36y^2z + 18y^3z} =$$ Trick 2: Binomische Formel $$\frac{2x^2 + 4xy + 2y^2}{4(x+y)} =$$
Addition und Subtraktion	Summe/Differenz zweier Brüche für Zahlen $a,\ b \neq 0,\ c,\ d \neq 0$: $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$ selber Nenner erforderlich — Erweitern — Addition Subtraktion $$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$$	Regel durchziehen: $$\frac{1}{3a} + \frac{1}{7a} =$$ Bruch zunächst vereinfachen: $$\frac{x}{-x-3y} + \frac{y}{x+3y} =$$
Multiplikation und Division	Produkt zweier Brüche für Zahlen $a,\ b \neq 0,\ c,\ d \neq 0$: $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$ $\Rightarrow$ Multiplikation von Zähler und Nenner Quotient zweier Brüche für Zahlen $a,\ b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$: $$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$ $\Rightarrow$ Multiplikation mit dem Kehrbruch	Beispiele: $$\frac{4abc}{32a \cdot 6b} =$$ $$\frac{3b}{2} : \frac{b}{6} =$$

1.2 Potenzen

		Tipps, Tricks, Beispiel(e):
Was sind Potenzen? Basis? Exponent? Was soll das?	• n-malige Multiplikation ($n \in \mathbb{N}$) identischer Zahlen $a \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow a^n := a \cdot a \cdot ...a \cdot a$ (n Faktoren) • a^n ist n-te Potenz von a (*Basis* a, *Exponent* n)	
Erweiterung auf Exponenten $n \in \mathbb{Z}$?	• Potenzen mit negativem Exponenten, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$ • Potenzen mit Exponent 0: $$a^0 = 1$$ • Spezialfall Basis 0: $$0^0 = 1,\ 0^n = 0$$	Beispiel: $-\frac{1}{4}^{-2} =$ $\frac{1}{2^{-3}} =$
!!! Gesetze !!!	Für die Basis $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und Exponenten $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt: 1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ 2. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ 3. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ 4. $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$ 5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	Beispiele: $\frac{x^n \cdot x^{m-n}}{x^{3m}} =$ $\frac{(a^{-4} \cdot x^3)^2}{(x^{-2} \cdot a^5)^3} =$
Erweiterung	Bisher: $n \in \mathbb{N}$ • Potenzen mit rationalem Exponenten $p = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ (siehe Wurzeln) • Potenzen mit reellem Exponenten auch hier gelten die Potenzregeln	

$\Downarrow$

Umkehrungsproblem:
Wie kann man $b^n = a$...

... nach Basis b auflösen (wenn n bekannt)???

$\Downarrow$

WURZELZIEHEN

$\Downarrow$

... nach Exponent n auflösen (wenn b bekannt)???

$\Downarrow$

LOGARITHMIEREN

$\Downarrow$

WURZELN (Basis b unbekannt)	LOGARITHMEN (Exponent n unbekannt)

Wurzeln? Radikand? $\cdots$

- $a \in \mathbb{R}_0^+$, $n \geq 1$:
  Die Gleichung $b^n = a$ besitzt genau eine nicht-negative Lösung b, nämlich $b = \sqrt[n]{a}$
  (n-te Wurzel von a)
- a heißt *Radikand*, n *Wurzelexponent*

Logarithmus? verschiedene Basen? ...

- Die Gleichung $b^n = a$ besitzt genau eine Lösung $n \in \mathbb{R}$, nämlich $n = \log_b(a)$ (Logarithmus von a zur Basis b)
- $\log_b(a)$ ist nur für $a,\ b \in R^+$ mit $b \neq 1$ definiert
- Basis $e = 2.71828\ldots$: Natürlicher Logarithmus (Notation: $\log_e = \ln$)

Erweiterung auf $a \in \mathbb{R}$:
Lösung der Gleichung $b^n = a$, wenn

- $n \in \mathbb{N}$ ungerade: $b = \sqrt[n]{a}$
- $n \in \mathbb{N}$ gerade ...
  - ... und $a > 0$:
    $b_1 = \sqrt[n]{a}$, $b_2 = -\sqrt[n]{a}$
  - ... und $a < 0$:
    keine reelle Lösung

Wichtiges zum Logarithmus:

- $\log_b(1) = 0$
- $\log_b(b^a) = 0$, z.B. $\ln(e^a) = a$
- $b^{log_b(a)} = a$, z.B. $e^{\ln(a)} = a$

!!!Logarithmusregeln!!!:
Für $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}_0^+$ mit $c \neq 1$ gilt:

1. $\log_c(a \cdot b) = \log_c(a) + \log_c(b)$
2. $\log_c(\frac{a}{b}) = \log_c(a) - \log_c(b)$
3. $\log_c(b^a) = a \cdot \log_c(b)$

Bezug zu Potenzen:
Potenzen mit rationalem Exponenten in Wurzelschreibweise
Für $a \in \mathbb{R}_0^+,\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}$:

- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$: $a^p = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Beispiele:

$\frac{1}{3}\ln(2x^3) + \ln(4) =$

$\log_a(4xy) - \log_a(8x) =$

2 SUMMEN- UND PRODUKTZEICHEN

2.1 Das Summenzeichen

2.1.1 Die Bestandteile

$$\sum_{j=n}^{m} a(j),$$

wobei ...
... Σ das Summenzeichen ist
... j der Laufindex ist
... n der Startwert ist
... m der Endwert ist
... $a(j)$ ein Ausdruck in Abhängigkeit von Laufindex j ist

2.1.2 Bedienungsanleitung

2 Schritte:

1. Setzte für j nacheinander alle ganzen Zahlen zwischen Startwert und Endwert ein
2. Summiere alle so entstandenen Ausdrücke auf

2.1.3 Warum überhaupt?

Summenzeichen ermöglicht kurze Schreibweise von Summen mit bestimmten Muster

$$\sum_{i=1}^{10000} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots$$

2.1.4 Ein paar Beispiele ...

$$\sum_{l=0}^{5}(2l+1) =$$

$$\sum_{l=0}^{5} 2l + 1 =$$

$$\sum_{j=1}^{7} 4(j-1)^2 =$$

$$\sum_{k=2}^{4} 5 =$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{4}(i \cdot j + 2) =$$

WICHTIG: Auf Klammersetzung achten!!!

2.2 Das Produktzeichen

Ähnliche Bedienungsanleitung wie das Summenzeichen, aber nun:
In Schritt 2 werden alle so entstandenen Terme multipliziert

Ein paar Beispiele:

- $\prod_{i=1}^{3} (j+1) =$
- $\prod_{j=1}^{3} c \cdot (j+1) =$
- $\prod_{v=1}^{4} e^{2v} =$
- $\prod_{v=1}^{4} e^{2v-1} =$

3 Gleichungen

3.1 Allgemeines: Gleichungen, Lösungsmenge, Lösungsstrategie ...

- Gleichung:
  - Zwei Terme werden durch "=" in Relation gesetzt (linke Seite = rechte Seite)
  - Terme enthalten i.A. mindestens eine Unbekannte (Variable), z.B. x
- Einsetzen konkreter Zahlen für die Variable führt zu wahrer oder falscher Aussage
- Äquivalente Gleichungen: Zwei äquivalente Gleichugen haben die gleiche Lösungsmenge (Gleichung 1 $\Leftrightarrow$ Gleichung 2)
- *Unser Ziel:*
  Bestimmung der Menge an Werten für die Variable(n), die zu einer wahren Aussage führen (Lösungsmenge)
- Zunächst: Nur eine Variable

Rezept zur Bestimmung der Lösungsmenge:

Illustration anhand von

$$4x - 5(x+1) = 7 - 2x$$

1. Bestimme den Definitionsbereich der Gleichung (bestehend aus allen reellen Zahlen, für welche die Terme links und rechts erklärt sind)

   Bsp:

2. Bestimme die Lösungsmenge

   $$L = \{x \in \mathbb{D} | \text{x löst die Gleichung}\}$$

   Welche Werte des Definitionsbereiches führen zu einer wahren Aussage?

   (a) Vereinfache die Terme auf beiden Seiten soweit wie möglich
   Bsp:

   (b) Nutze *elementare Umformungen*

- Addition oder Subtraktion einer reellen Zahl bzw. eines Terms
- Multiplikation oder Divison einer reellen Zahl bzw. Term $\neq 0$),

um die Gleichung nach der Unbekannten aufzulösen

$\Rightarrow$ Die Waage bleibt im Gleichgewicht:

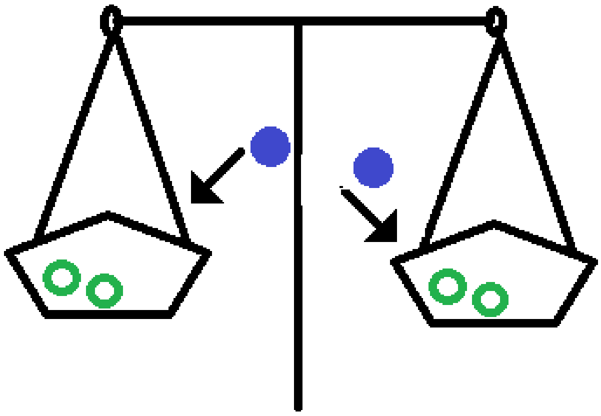

Abbildung 1: Elementare Umformung Umformung

$\Rightarrow$ Die Lösungsmenge wird dadurch nicht verändert

Bsp:

(c) Schreibe die Lösungsmenge auf

Bsp:

(d) Mache evlt. Probe: Einsetzen der Variable in die ursprüngliche Gleichung
$\Rightarrow$ wahre Aussage?

Bsp:

3.2 Lineare Gleichungen

- Unbekannte kommen nur in linearer Form vor
- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$
- Lösungsmenge einer linearen Gleichung $ax = b$ $(a, b \in \mathbb{R})$:
  - wenn $a \neq 0$: $L = \{\frac{b}{a}\}$ (eindeutige Lösung)
  - wenn $a = 0\ldots$
    - $\ldots$ und $b \neq 0$: $L = \{\} = \emptyset$ (keine Lösung)
      Bsp: $4 \cdot (3y - 1) = 2 \cdot (6y - 3)$
    - $\ldots$ und $b = 0$: $L = \mathbb{R}$ (unendlich viele Lösungen)
      Bsp: Wie müsste man das obige Beispiel verändern, damit man unendlich viele Lösungen bekommt?

3.3 Quadratische Gleichungen

- Gleichungen, in denen die Variable höchstens als zweite Potenz vorkommt
- Bringe Gleichung auf die Form ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

  $$ax^2 + bx + c = 0,$$

  mit quadratischem Term ax^2, Linearterm bx und Absolutglied c.
- Definitionsbereich: $\mathbb{R}$
- Wissenswert für die Bestimmung der Lösungsmenge:
  - Das Produkt zweier Faktoren kann nur dann Null sein, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist:

    $$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0, \; L = \{x_1, x_2\}$$
  - Mitternachtsformel:

    $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

    Anhand der Mitternachtsformel ist unmittelbar ersichtlich, dass quadratische Gleichungen
    * zwei Lösungen (nämlich wenn: $D = b^2 - 4ac > 0$),
    * eine Lösung (nämlich wenn: $D = 0$) oder
    * keine Lösung (nämlich wenn: $D < 0$)

    haben können.

3.4 Spezielle Gleichungen

Betragsgleichungen:

- Allgemein: Rechnen mit Beträgen

  $$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases} \tag{1}$$

  Schreibe folgende Ausdrücke ohne Betragszeichen:
  $|2x^2|, \; |e^{2x}|, \; |3x + 6|$
- Gleichungen mit Beträgen:
  - Bestimmung des Definitionsbereichs
  - Wenn unklar, ob Term innerhalb der Betragsstriche positiv oder negativ ist
    $\Rightarrow$ Fallunterscheidung
    * Wo ist Inhalt von $|\cdot|$ positiv? Wo negativ?
    * Löse für beide Fälle nach der Unbekannten auf
    * Überprüfe, ob Lösung innerhalb des Definitionsbereiches liegt
    * Bestimme die Lösungsmenge

    Beispiel:

    $$|3x + 6| - 2x = -5$$

Weitere spezielle Gleichungen:

Gleichungstyp	!!Beachte!!	Beispiel
Bruchgleichungen (wenn Unbekannte x im Nenner)	• Definitionsbereich: nur x-Werte, die zu einem Nenner ungleich Null führen • Überprüfe, ob für x berechneten Werte vorab Multiplikationen mit (Divisionen durch) Null nötig waren	$\frac{x-3}{2x-1} = \frac{1}{3}$ $\frac{x-3}{x^2-9} = 0$
Wurzelgleichungen (wenn Unbekannte kommt als Argument von Wurzel vor)	• Definitionsbereich: nur x-Werte, für die Term unter Wurzel ≥ 0 • Auflösen durch Quadrieren	$\sqrt{x+1} + 1 = 5$
Logarithmische Gleichungen (wenn Unbekannte kommt als Argument von Logarithmus vor)	• Definitionsbereich: nur x-Werte, für die Term in Logarithmus positiv • Auflösen durch Potenzbildung zur Basis des Logarithmus	$\ln(4x+1) - \ln(3) + 2 = 3$
Exponentialgleichungen (wenn Unbekannte im Exponenten einer Potenz vorkommt)	Auflösung durch Logarithmieren	$e^{2x-1} \cdot e^{4x} = 2$

3.5 Lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Das Einsetzungsverfahren:

Illustration anhand von

$$\begin{aligned} I.)\ & 2x_1 - 4x_2 = 3 \\ II.)\ & x_1 + x_2 = 1 \end{aligned}$$

1. Löse eine der beiden Gleichungen nach einer beliebigen Unbekannten auf
2. Setze das Ergebnis in die andere Gleichung ein
3. Löse die entstandene lineare Gleichung mit einer Unbekannten
4. Setze die Lösung in die ursprüngliche Gleichung ein und löse nach der anderen Unbekannten auf

4 Ungleichungen

- Nun: Terme nicht mit "=", sondern mit "≥", "≤", "<" oder">"in Relation gesetzt
- Lösungsstrategie analog zu Gleichungen
- **Beachte allerdings:** Bei Multiplikation mit einem (bzw. Division durch einen) negativen Ausdruck ist das Ungleichheitszeichen umzudrehen:

$$-\frac{1}{3}x < 4 \quad | \cdot (-3) \Leftrightarrow x > -12, \quad L =]-12, \infty[$$
$$-2x \leq 4 \quad |/(-2) \Leftrightarrow x \geq -2, \quad L = [-2, \infty[$$