

Nachname:

Vorname:

Matrikelnummer:

--	--	--

Formelsammlung zur Vorlesung

Statistik I für Studierende der Soziologie, des Nebenfachs Statistik, der Medieninformatik und der Cultural Cognitive Linguistics

Prof. Dr. Thomas Augustin und Georg Schollmeyer
(Brandt, Endres, Plaß)

Wintersemester 2016/17

Es gelten die Hinweise zu den Klausurmodalitäten und erlaubten Hilfsmitteln auf der Veranstaltungshomepage! Insbesondere gilt:

Für die Verwendung in der Klausur im Wintersemester 2016/17 darf diese Version auf den bedruckten Seiten (ab Seite 1) (und nur dort!) mit zusätzlichen handschriftlichen Kommentaren versehen werden, falls

1. die Formelsammlung in Originalgröße ausgedruckt wurde und
2. die Eintragungen in der eigenen Handschrift im Original vorgenommen wurden (keine Kopie!).

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und erste Grundbegriffe	1
2 Häufigkeitsverteilungen	2
3 Lage- und Streuungsmaße	4
4 Konzentrationsmessung	9
5 Assoziationsmessung in Kontingenztafeln	12
6 Korrelationsanalyse: Zusammenhangsanalyse stetiger Merkmale	19

1 Einführung und erste Grundbegriffe

1.1 Vorbemerkungen zur Organisation, Bedeutung und Struktur der Veranstaltung

1.2 Was soll Statistik (nicht)?

1.3 Literatur

1.4 Grundbegriffe

Notation Merkmale werden typischerweise mit Großbuchstaben bezeichnet (X, Y, Z , etc.), Ausprägungen mit dem zugehörigen Kleinbuchstaben (x, y, z). Der Wertebereich wird mit W_x, W_y, W_z bzw. W bezeichnet.

Formal ist jedes Merkmal eine Funktion.

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow W \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Merkmaltypen

- Stetige, quasi-stetige und diskrete Merkmale
- Skalenniveaus
- Qualitative und quantitative Merkmale

2 Häufigkeitsverteilungen

Ausgangssituation An n Einheiten $\omega_1, \dots, \omega_n$ sei das Merkmal X beobachtet worden. Die *verschiedenen* potentiell möglichen Merkmalsausprägungen werden mit a_1, \dots, a_k bezeichnet.

2.1 Häufigkeiten

Absolute Häufigkeiten der Merkmalsausprägungen Für jedes a_j , $j = 1, \dots, k$, bezeichnen h_j und $h(a_j)$ die *absolute Häufigkeit* der Ausprägung a_j , d.h. die Anzahl der x_i aus x_1, \dots, x_n mit $x_i = a_j$.

Formal:

$$h_j := h(a_j) := |\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a_j\}|.$$

Es gilt:

$$\sum_{j=1}^k h_j = n.$$

Relative Häufigkeiten der Merkmalsausprägungen Für jedes a_j , $j = 1, \dots, k$, bezeichnen f_j und $f(a_j)$ die *relative Häufigkeit* der Ausprägung a_j , also

$$f_j := f(a_j) := \frac{h_j}{n}.$$

f_1, f_2, \dots, f_k nennt man die *relative Häufigkeitsverteilung*.

Es gilt:

$$\sum_{j=1}^k f_j = 1.$$

Häufigkeitstabelle

j	a_j	h_j	f_j
1	a_1	h_1	f_1
2	a_2	h_2	f_2
3	a_3	h_3	f_3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
k	a_k	h_k	f_k
Σ		n	1

2.2 Grafische Darstellung

2.3 Histogramm

2.4 Kumulierte Häufigkeiten und empirische Verteilungsfunktion

Definition Gegeben sei die Urliste x_1, \dots, x_n eines (mindestens) ordinalskalierten Merkmals mit der Häufigkeitsverteilung h_1, \dots, h_k bzw. f_1, \dots, f_k .

Dann heißt

$$H(x) = \sum_{j:a_j \leq x} h(a_j) = \sum_{j:a_j \leq x} h_j$$

absolute kumulierte Häufigkeitsverteilung und

$$F(x) = \sum_{j:a_j \leq x} f(a_j) = \frac{1}{n} \sum_{j:a_j \leq x} h(a_j) = \frac{H(x)}{n}$$

relative kumulierte Häufigkeitsverteilung bzw. empirische Verteilungsfunktion.

Gruppierte Daten

- k Klassen $[c_0, c_1), \dots, [c_{j-1}, c_j), \dots, [c_{k-1}, c_k]$, h_j Häufigkeit in j -ter Klasse, $j = 1, \dots, k$
- Verwende bei einem x aus der Klasse $[c_{j-1}, c_j)$ als Approximation für $H(x)$ folgenden, aus der linearen Interpolation gewonnenen, Punkt:

$$H(x) \approx \sum_{\ell=1}^{j-1} h_\ell + \frac{h_j}{(c_j - c_{j-1})} \cdot (x - c_{j-1})$$

3 Lage- und Streuungsmaße

3.1 Arithmetisches Mittel und Varianz

Definition (Arithmetisches Mittel) Sei x_1, \dots, x_n die Urliste eines (mindestens) intervallskalierten Merkmals X . Dann heißt

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

das *arithmetische Mittel* der Beobachtungen x_1, \dots, x_n .

Alternative Berechnung basierend auf Häufigkeiten Hat das Merkmal X die Ausprägungen a_1, \dots, a_k und die (relative) Häufigkeitsverteilung h_1, \dots, h_k bzw. f_1, \dots, f_k , so gilt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k a_j h_j = \sum_{j=1}^k a_j f_j.$$

Definition (Varianz) Sei x_1, \dots, x_n die Urliste eines intervallskalierten Merkmals X . Dann heißen

$$\tilde{s}_X^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

die (*empirische*) *Varianz* oder *Stichprobenvarianz* und

$$\tilde{s}_X := \sqrt{\tilde{s}_X^2}$$

die *empirische Streuung*, *Stichprobenstreuung* oder *Standardabweichung von X* .

Alternative Berechnung basierend auf Häufigkeiten Sind die Ausprägungen a_1, \dots, a_k mit (relativer) Häufigkeitsverteilung h_1, \dots, h_k bzw. f_1, \dots, f_k gegeben, so gilt

$$\tilde{s}_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k h_j (a_j - \bar{x})^2 = \sum_{j=1}^k f_j (a_j - \bar{x})^2.$$

Verschiebungssatz Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{s}_X^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \\ &= \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (a_j^2) \cdot h_j \right) - \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k a_j \cdot h_j \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^k (a_j^2) \cdot f_j - \left(\sum_{j=1}^k a_j \cdot f_j \right)^2. \end{aligned}$$

Korrigierte empirische Varianz Sei x_1, \dots, x_n die Urliste eines intervallskalierten Merkmals X . Dann heißt

$$s_X^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

die *korrigierte empirische Varianz* oder *korrigierte Stichprobenvarianz* von X .

Satz (Arithmetisches Mittel und lineare Transformationen) Gegeben sei die Urliste x_1, \dots, x_n eines (mindestens) intervallskalierten Merkmals X . Betrachtet wird das (linear transformierte) Merkmal $Y = a \cdot X + b$ und die zugehörigen Ausprägungen y_1, \dots, y_n . Dann gilt für das arithmetische Mittel \bar{y} von Y :

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b.$$

Satz (Varianz und lineare Transformationen) Sei x_1, \dots, x_n die Urliste eines mindestens intervallskalierten Merkmals X mit $\tilde{s}_X > 0$ und y_1, \dots, y_n die zugehörige Urliste des Merkmals $Y = a \cdot X + b$. Dann gilt

$$\tilde{s}_Y^2 = a^2 \cdot \tilde{s}_X^2$$

und

$$\tilde{s}_Y = |a| \cdot \tilde{s}_X.$$

Definition (Arithmetisches Mittel bei gruppierten Daten) Sei X ein intervallskaliertes Merkmal, das in gruppierter Form mit k Klassen $[c_0, c_1), [c_1, c_2), \dots, [c_{k-1}, c_k]$ erhoben wurde. Mit h'_ℓ , $\ell = 1, \dots, k$, als absoluter Häufigkeit der ℓ -ten Klasse, f'_ℓ als zugehöriger relativer Häufigkeit und $m_\ell := \frac{c_\ell + c_{\ell-1}}{2}$ als der jeweiligen Klassenmitte definiert man als *arithmetisches Mittel für gruppierte Daten*

$$\bar{x}_{\text{grupp}} := \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^k h'_\ell m_\ell = \sum_{\ell=1}^k f'_\ell m_\ell.$$

Satz (Arithmetisches Mittel bei geschichteten Daten) Zerfällt die Grundgesamtheit in z Schichten, so kann \bar{x} aus den Schichtmitteln $\bar{x}^{(\ell)}$, $\ell = 1, \dots, z$, berechnet werden:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^z n^{(\ell)} \bar{x}^{(\ell)}.$$

Dabei bezeichnet $n^{(\ell)}$ die Anzahl der Elemente in der ℓ -ten Schicht.

Satz (Varianz bei geschichteten Daten) – Varianzzerlegung / Streuungszerlegung

- Schicht $1, \dots, \ell, \dots, z$
- Besetzungszahlen $n^{(1)}, \dots, n^{(\ell)}, \dots, n^{(z)}$; $\sum_{\ell=1}^z n^{(\ell)} = n$
- Mittelwerte $\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(\ell)}, \dots, \bar{x}^{(z)}$
- Varianzen $\tilde{s}^{2(1)}, \dots, \tilde{s}^{2(\ell)}, \dots, \tilde{s}^{2(z)}$

Mit
$$\tilde{s}_{\text{innerhalb}}^2 := \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^z n^{(\ell)} \tilde{s}^{2(\ell)}$$

sowie
$$\tilde{s}_{\text{zwischen}}^2 := \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^z n^{(\ell)} (\bar{x}^{(\ell)} - \bar{x})^2$$

gilt
$$\tilde{s}^2 = \tilde{s}_{\text{innerhalb}}^2 + \tilde{s}_{\text{zwischen}}^2.$$

3.2 Median & Quantile

Defintion (Median) Gegeben sei die Urliste x_1, \dots, x_n eines (mindestens) ordinalskalierten Merkmals X . Jede Zahl x_{med} mit

$$\frac{|\{i | x_i \leq x_{\text{med}}\}|}{n} \geq 0.5 \quad \text{und} \quad \frac{|\{i | x_i \geq x_{\text{med}}\}|}{n} \geq 0.5$$

heißt *Median*.

Definition (Quantile) Gegeben sei die Urliste x_1, \dots, x_n eines (mindestens) ordinalskalierten Merkmals X und eine Zahl $0 < \alpha < 1$. Jede Zahl x_α mit

$$\frac{|\{i | x_i \leq x_\alpha\}|}{n} \geq \alpha \quad \text{und} \quad \frac{|\{i | x_i \geq x_\alpha\}|}{n} \geq 1 - \alpha$$

heißt $\alpha \cdot 100\%$ -*Quantil*.

Spezielle Quantile

- Median: $x_{0.5} = x_{\text{med}}$.
- Quartile: $x_{0.25}$ („unteres Quartil“), $x_{0.75}$ („oberes Quartil“)
- Dezile: $x_{0.1}, x_{0.2}, \dots, x_{0.8}, x_{0.9}$.

Allgemeine Regel zur Bestimmung des α -Quantils über die geordnete Urliste

$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$:

$\alpha \cdot n$ ist ganzzahlig: $x_\alpha \in [x_{(\alpha \cdot n)}; x_{(\alpha \cdot n + 1)}]$
bei mindestens intervallskalierten Daten zum Zeichnen eines Boxplots: $x_\alpha = \frac{1}{2}(x_{(\alpha \cdot n)} + x_{(\alpha \cdot n + 1)})$

$\alpha \cdot n$ ist nicht ganzzahlig: $x_\alpha = x_{(\lceil \alpha \cdot n \rceil)}$
($\lceil x \rceil$ heißt kleinste ganze Zahl größer oder gleich x)

Satz (Verhalten unter Transformation) Sei x_1, x_2, \dots, x_n die Urliste eines (mindestens) ordinalskalierten Merkmals X und g eine monotone Funktion.

- i) Ist x_{med} ein Median von X , so gilt mit $y_1 = g(x_1), \dots, y_n = g(x_n)$ als Urliste des Merkmals $Y = g(X)$:

$$y_{\text{med}} = g(x_{\text{med}})$$

ist ein Median von Y .

- ii) Fordert man zusätzlich, dass $g(\cdot)$ monoton steigend ist, so gilt die entsprechende Aussage für beliebige Quantile.

Bemerkung (Gruppierten Daten) Bei gruppierten Daten gilt für alle $\alpha \in (0, 1)$ und alle α -Quantile x_α : Die Gruppe, in der x_α liegt, ist ein α -Quantil für das gruppierte Merkmal X_{grupp} .

3.3 Modus

Definition Sei x_1, \dots, x_n die Urliste eines nominalskalierten Merkmals mit den Ausprägungen a_1, \dots, a_k und der Häufigkeitsverteilung h_1, \dots, h_k , so heißt a_{j^*} *Modus* x_{mod} genau dann, wenn $h_{j^*} \geq h_j$, für alle $j = 1, \dots, k$.

3.4 Ein kurzer Vergleich der Lagemaße und einige Bemerkungen

3.5 Geometrisches und harmonisches Mittel

Definition (Geometrisches Mittel) Sei $\Omega = \{0, \dots, n\}$ eine Menge von Zeitpunkten und b_0, b_1, \dots, b_n mit $b_i := B(i) > 0$ die Urliste eines Merkmals B .

Für $i = 1, \dots, n$ heißt

$$x_i = \frac{b_i}{b_{i-1}}$$

der i -te *Wachstumsfaktor* und

$$r_i = \frac{b_i - b_{i-1}}{b_{i-1}} = x_i - 1$$

die i -te *Wachstumsrate*.

Dann bezeichnet man

$$\bar{x}_{\text{geom}} := \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}$$

als das *geometrische Mittel der Wachstumsfaktoren* x_1, \dots, x_n .

Es gilt

$$b_n = b_0 \cdot (\bar{x}_{\text{geom}})^n.$$

Definition (Harmonisches Mittel) Sei x_1, \dots, x_n mit $x_i \neq 0$ für alle i die Urliste eines verhältnisskalierten Merkmals X . Dann heißt

$$\bar{x}_{\text{har}} := \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

das *harmonische* Mittel der x_1, \dots, x_n .

3.6 Weitere Streuungsmaße

Variationskoeffizient Ist $\bar{x} > 0$, so heißt die Größe

$$v_X := \frac{\tilde{s}_X}{\bar{x}}$$

Variationskoeffizient des Merkmals X .

Inter-Quartils-Abstand Sind $x_{0.25}$ und $x_{0.75}$ das obere und das untere Quartil eines Merkmals, so heißt

$$d_{QX} := x_{0.75} - x_{0.25}$$

der *Interquartilsabstand*.

Median-Absolute-Deviation Der Median der Werte $|x_i - x_{\text{med}}|$, $i = 1, \dots, n$, heißt *Median-Absolute-Deviation von X* (MAD_X).

Spannweite Die Größe

$$R_X := x_{(n)} - x_{(1)}$$

heißt *Spannweite* von X .

3.7 Boxplot

4 Konzentrationsmessung

Durchgängige Annahmen in diesem Kapitel

- X sei ein *verhältnisskaliertes* Merkmal (mit Urliste x_1, \dots, x_n)
- $x_i \geq 0$, für alle $i = 1, \dots, n$, und $\sum_{i=1}^n x_i > 0$
- Betrachtet werden die der Größe nach geordneten Daten: $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$

4.1 Relative Konzentrationsmessung

4.1.1 Lorenzkurve

Definition Sei $u_j := \frac{j}{n}$ und $v_j := \frac{\sum_{i=1}^j x_{(i)}}{\sum_{i=1}^n x_{(i)}} = \frac{\sum_{i=1}^j x_{(i)}}{\sum_{i=1}^n x_{(i)}}$

dann heißt die stückweise lineare Kurve durch die Punkte $(0, 0)$, (u_1, v_1) , (u_2, v_2) , \dots , (u_n, v_n) = $(1, 1)$ *Lorenzkurve*.

Berechnung über die Häufigkeiten Sind die relativen/absoluten Häufigkeiten f_1, \dots, f_k bzw. h_1, \dots, h_k der *der Größe nach geordneten* Merkmalsausprägungen $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ gegeben, so gilt für $j = 1, \dots, k$

$$u_j = \sum_{l=1}^j \frac{h_l}{n} = \sum_{l=1}^j f_l = F(a_j)$$

und

$$v_j = \frac{\sum_{l=1}^j h_l \cdot a_l}{\sum_{l=1}^k h_l \cdot a_l} = \frac{\sum_{l=1}^j f_l \cdot a_l}{\sum_{l=1}^k f_l \cdot a_l}.$$

Berechnung bei klassierten Daten Bei klassierten Daten mit den Klassen $[c_0, c_1), [c_1, c_2), \dots, [c_{k-1}, c_k]$ und Klassenmitten $m_l = \frac{c_{l-1} + c_l}{2}$ (mit $l = 1, \dots, k$) verwendet man als Approximation

$$v_j = \frac{\sum_{l=1}^j h_l \cdot m_l}{\sum_{l=1}^k h_l \cdot m_l} = \frac{\sum_{l=1}^j f_l m_l}{\sum_{l=1}^k f_l m_l}.$$

4.1.2 Gini-Koeffizient

Definition Gegeben sei die geordnete Urliste $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ eines verhältnisskalierten Merkmals X . Dann heißt

$$G := \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^n i \cdot x_{(i)}}{n \sum_{i=1}^n x_i} - \frac{n+1}{n}$$

Gini-Koeffizient und

$$G^{\text{norm}} := \frac{n}{n-1} \cdot G$$

normierter Gini-Koeffizient (Lorenz-Münzner-Koeffizient).

Bemerkung Betrachtet man die geordneten Ausprägungen $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ mit den Häufigkeiten h_1, h_2, \dots, h_k , so gilt

$$G = \frac{\sum_{l=1}^k (u_{l-1} + u_l) f_l \cdot a_l}{\sum_{l=1}^k f_l \cdot a_l} - 1 = \frac{\sum_{l=1}^k (u_{l-1} + u_l) h_l \cdot a_l}{\sum_{l=1}^k h_l \cdot a_l} - 1 = 1 - \sum_{l=1}^k f_l (v_{l-1} + v_l)$$

mit

$$u_j = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^j h_l \quad \text{und} \quad u_0 := 0.$$

4.1.3 Quantilsbezogene relative Konzentrationsmessung

Sei $0 =: \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_l < \dots < \alpha_{q-1} < 1 =: \alpha_q$ eine Einteilung der Abszisse und z_l^* derjenige Merkmalsanteil, der auf die l -te Quantilsgruppe entfällt. Dann ergibt sich die Kurve durch die Punkte (u_l^*, v_l^*) mit

$$u_l^* = \alpha_l \quad \text{und} \quad v_l^* = \sum_{r \leq l} z_r^*$$

Berechnung des Gini-Koeffizienten

Unter der Annahme, dass in der jeweiligen Quantilsgruppe alle Einkommen gleich sind, erhält man in obiger Situation für den zugehörigen Gini-Koeffizienten

$$G^* = \left(\sum_{l=1}^k (u_{l-1}^* + u_l^*) \cdot z_l^* \right) - 1 = 1 - \sum_{l=1}^q f_l^* (v_{l-1}^* + v_l^*)$$

mit

$$f_l^* := \alpha_l - \alpha_{l-1}, \quad l = 1, \dots, q.$$

4.1.4 Einige weitere quantilsbasierte Maße

Robin-Hood-Index

- Äquidistante Einteilung der Abszisse
- Wie viel müsste den Reichen weggenommen werden, um zu einer Konzentration von 0 zu kommen?
- Ermittle für jede Quantilsgruppe mit einem Anteil von höchstens $\alpha = \frac{1}{q}$ den Abstand ihres Anteils zu α !
- Aufaddieren der positiven Abstände liefert den *Robin-Hood-Index*.

Quantilverhältnisse Bilde das Verhältnis von $(1 - \alpha)$ - und α -Quantil, zum Beispiel:

$$\frac{x_{0.9}}{x_{0.1}} \quad \text{Dezilverhältnis (falls } x_{0.1} > 0\text{)}.$$

4.2 Absolute Konzentrationsmessung

Definition (Konzentrationsrate) Sei $0 \leq x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ die geordnete Urliste eines verhältnisskalierten Merkmals mit $\sum_{i=1}^n x_i > 0$. Mit

$$p_{(i)} := \frac{x_{(i)}}{\sum_{j=1}^n x_j}$$

heißt

$$CR_g := \sum_{i=n-g+1}^n p_{(i)}$$

Konzentrationsrate (vom Grade g).

Definition (Herfindahl-Index) Sei $0 \leq x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ die geordnete Urliste eines verhältnisskalierten Merkmals mit $\sum_{i=1}^n x_i > 0$. Mit

$$p_{(i)} := \frac{x_{(i)}}{\sum_{j=1}^n x_j}$$

heißt

$$H := \sum_{i=1}^n p_{(i)}^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2$$

Herfindahl-Index.

Bemerkung (Rae-Index) Die Größe $1 - H$ wird auch als *Rae-Index* bezeichnet. $\frac{1}{H}$ heißt *Zahl der effektiven Parteien (Marktteilnehmer)*.

5 Assoziationsmessung in Kontingenztafeln

5.1 Multivariate Merkmale

5.2 Kontingenztafeln und bedingte Verteilungen

5.2.1 Gemeinsame Verteilung, Randverteilung, Kontingenztafel

Betrachtet wird ein zweidimensionales Merkmal (X, Y) bestehend aus den diskreten Merkmalen X und Y und die zugehörige Urliste $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Wir wollen ferner annehmen, dass X und Y nur endlich viele („wenige“) verschiedene Werte $a_1, \dots, a_i, \dots, a_k$ bzw. $b_1, \dots, b_j, \dots, b_m$ annehmen können.

Gemeinsame relative und absolute Häufigkeitsverteilung

$$h_{ij} = h(a_i, b_j), \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, m$$

Anzahl von Beobachtungen mit $x = a_i$ und $y = b_j$.

$$f_{ij} = h_{ij}/n = f(a_i, b_j), \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, m$$

Anteil von Beobachtungen mit $x = a_i$ und $y = b_j$.

Man nennt (h_{ij}) und (f_{ij}) , $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, m$, die *gemeinsame Verteilung* von (X, Y) in *absoluten* bzw. *relativen Häufigkeiten*.

Kontingenztafel / Kontingenztabelle / Kreuztabelle

Darstellung der Häufigkeiten in Form einer $(k \times m)$ -dimensionalen Häufigkeitstabelle

- Kontingenztafel der absoluten Häufigkeitsverteilung:

	b_1	\dots	b_j	\dots	b_m	
a_1	h_{11}	\dots	h_{1j}	\dots	h_{1m}	$h_{1\bullet}$
a_2	h_{21}	\dots	h_{2j}	\dots	h_{2m}	$h_{2\bullet}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
a_i	h_{i1}	\dots	h_{ij}	\dots	h_{im}	$h_{i\bullet}$
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
a_k	h_{k1}	\dots	h_{kj}	\dots	h_{km}	$h_{k\bullet}$
	$h_{\bullet 1}$	\dots	$h_{\bullet j}$	\dots	$h_{\bullet m}$	n

mit den *Randverteilungen*

$$h_{i\bullet} = h_{i1} + \dots + h_{im} = h(a_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad \text{für } X$$

und

$$h_{\bullet j} = h_{1j} + \dots + h_{kj} = h(b_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{für } Y.$$

- Kontingenztafel der relativen Häufigkeitsverteilung:

	b_1	\cdots	b_j	\cdots	b_m	
a_1	f_{11}	\cdots	f_{1j}	\cdots	f_{1m}	$f_{1\bullet}$
a_2	f_{21}	\cdots	f_{2j}	\cdots	f_{2m}	$f_{2\bullet}$
\vdots	\vdots	\cdots	\vdots	\cdots	\vdots	\vdots
a_i	f_{i1}	\cdots	f_{ij}	\cdots	f_{im}	$f_{i\bullet}$
\vdots	\vdots	\cdots	\vdots	\cdots	\vdots	\vdots
a_k	f_{k1}	\cdots	f_{kj}	\cdots	f_{km}	$f_{k\bullet}$
	$f_{\bullet 1}$	\cdots	$f_{\bullet j}$	\cdots	$f_{\bullet m}$	1

mit der relativen Häufigkeiten $f_{ij} = \frac{h_{ij}}{n}$ und den *Randverteilungen*

$$f_{i\bullet} = \frac{h_{i\bullet}}{n} = f_{i1} + \dots + f_{im} = f(a_i), \quad i = 1, \dots, k, \quad \text{für } X$$

und

$$f_{\bullet j} = \frac{h_{\bullet j}}{n} = f_{1j} + \dots + f_{kj} = f(b_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad \text{für } Y.$$

5.2.2 Ökologischer Fehlschluss

5.2.3 Graphische Darstellung der gemeinsamen Verteilung

5.2.4 Bedingte Häufigkeitsverteilungen

Definition Seien $h_{i\bullet} > 0$ und $h_{\bullet j} > 0$ für alle i, j . Für jedes $i = 1, \dots, k$ heißt

$$f_{Y|X}(b_1|a_i) := \frac{h_{i1}}{h_{i\bullet}} = \frac{h(a_i, b_1)}{h(a_i)}, \quad \dots, \quad f_{Y|X}(b_m|a_i) := \frac{h_{im}}{h_{i\bullet}} = \frac{h(a_i, b_m)}{h(a_i)}$$

bedingte (relative) Häufigkeitsverteilung von Y unter der *Bedingung* $X = a_i$.

Analog heißt für jedes $j = 1, \dots, m$

$$f_{X|Y}(a_1|b_j) := \frac{h_{1j}}{h_{\bullet j}} = \frac{h(a_1, b_j)}{h(b_j)}, \quad \dots, \quad f_{X|Y}(a_k|b_j) := \frac{h_{kj}}{h_{\bullet j}} = \frac{h(a_k, b_j)}{h(b_j)}$$

bedingte (relative) Häufigkeitsverteilung von X unter der *Bedingung* $Y = b_j$.

Bemerkung Bedingte Verteilungen werden immer als relative Häufigkeiten ausgedrückt. Für die Berechnung gilt

$$f_{X|Y}(a_i|b_j) = \frac{h_{ij}}{h_{\bullet j}} = \frac{\frac{h_{ij}}{n}}{\frac{h_{\bullet j}}{n}} = \frac{f_{ij}}{f_{\bullet j}}$$

und analog

$$f_{Y|X}(b_j|a_i) = \frac{h_{ij}}{h_{i\bullet}} = \frac{f_{ij}}{f_{i\bullet}}.$$

5.3 (Empirische) Unabhängigkeit und χ^2

5.3.1 (Empirische) Unabhängigkeit

Definition Die beiden Komponenten X und Y eines bivariaten Merkmals (X, Y) heißen voneinander (*empirisch*) *unabhängig*, falls für alle $i = 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, m$

$$f_{Y|X}(b_j|a_i) = f_{\bullet j} = f(b_j) \quad (1)$$

und

$$f_{X|Y}(a_i|b_j) = f_{i\bullet} = f(a_i) \quad (2)$$

gilt.

Satz

- a) Es genügt, entweder (1) oder (2) zu überprüfen: Mit einer der beiden Beziehungen gilt auch die andere.
- b) X und Y sind genau dann empirisch unabhängig, wenn für alle $i = 1, \dots, k$ und alle $j = 1, \dots, m$ gilt:

$$f_{ij} = f_{i\bullet} \cdot f_{\bullet j}. \quad (3)$$

- c) Gleichung (3) ist äquivalent zu

$$h_{ij} = \frac{h_{i\bullet} \cdot h_{\bullet j}}{n}.$$

5.3.2 χ^2 -Abstand, χ^2 -Koeffizient

Definition Mit

$$\tilde{h}_{ij} := \frac{h_{i\bullet} \cdot h_{\bullet j}}{n}.$$

wird der χ^2 -Koeffizient definiert:

$$\chi^2 := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{(h_{ij} - \tilde{h}_{ij})^2}{\tilde{h}_{ij}}.$$

Alternative Berechnung von χ^2 in Vierfeldertafeln

$$\chi^2 = \frac{n \cdot (h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21})^2}{h_{1\bullet}h_{2\bullet}h_{\bullet 1}h_{\bullet 2}} \quad (4)$$

5.3.3 χ^2 -basierte Maßzahlen

Kontingenzkoeffizient nach Pearson

$$K := \sqrt{\frac{\chi^2}{n + \chi^2}}$$

Korrigierter Kontingenzkoeffizient

$$K^* := \frac{K}{K_{\max}}$$

mit

$$K_{\max} := \sqrt{\frac{\min\{k, m\} - 1}{\min\{k, m\}}}.$$

Kontingenzkoeffizient nach Cramér (Cramér's V)

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{\chi^2}{n \cdot (\min\{k, m\} - 1)}} \\ &= \sqrt{\frac{\chi^2}{\text{maximaler Wert}}} \end{aligned}$$

Phi-Koeffizient Φ (entspricht dem Cramér's V bei der Vierfeldertafel ($k = m = 2$))

$$V = \sqrt{\frac{\chi^2}{n \cdot (\min\{k, m\} - 1)}} = \sqrt{\frac{\chi^2}{n}}.$$

mit (4) ergibt sich also

$$\Phi = \left| \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{\sqrt{h_{1\bullet}h_{2\bullet}h_{\bullet 1}h_{\bullet 2}}} \right|.$$

Lässt man die Betragsstriche weg, so erhält man den *signierten Phi-Koeffizienten* oder *Punkt-Korrelationskoeffizienten*

$$\Phi_s = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}}{\sqrt{h_{1\bullet}h_{2\bullet}h_{\bullet 1}h_{\bullet 2}}},$$

der häufig ebenfalls als *Phi-Koeffizient* bezeichnet wird.

5.4 Weitere Methoden für Vierfeldertafeln

Risiko Aus der medizinischen Statistik kommend wird die bedingte relative Häufigkeit $f(b_j|a_i)$ oft auch als *Risiko* für b_j unter Bedingung a_i bezeichnet:

$$R(b_j|a_i) := f_{Y|X}(b_j|a_i) = \frac{h_{ij}}{h_{i\bullet}} \quad i, j = 1, 2.$$

Relatives Risiko Für eine Vierfelder-Tafel heißt

$$RR(b_1) := \frac{f_{Y|X}(b_1|a_1)}{f_{Y|X}(b_1|a_2)} = \frac{h_{11}/h_{1\bullet}}{h_{21}/h_{2\bullet}}$$

relatives Risiko für b_1 .

Prozentsatzdifferenz Die Größe

$$d\%(b_j) := (f_{Y|X}(b_j|a_1) - f_{Y|X}(b_j|a_2)) \cdot 100, \quad j = 1, 2$$

heißt *Prozentsatzdifferenz* für b_j .

Odds Die Größe

$$O(b_1|a_i) := \frac{R(b_1|a_i)}{1 - R(b_1|a_i)} \quad i = 1, 2$$

heißt *Odds* oder *Chance* von b_1 unter der Bedingung a_i .

Odds Ratio (Kreuzproduktverhältnis) Es gilt:

$$OR(b_1) := \frac{O(b_1|a_1)}{O(b_1|a_2)} = \frac{h_{11} \cdot h_{22}}{h_{12} \cdot h_{21}}$$

Yules Q Die Größe

$$Q := \frac{h_{11} \cdot h_{22} - h_{12} \cdot h_{21}}{h_{11} \cdot h_{22} + h_{12} \cdot h_{21}}$$

heißt Yules Q .

5.5 PRE-Maße (Prädiktionsmaße)

Definition (Prädiktionsmaß) PRE = Proportional Reduction in Error

$$PRE = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = 1 - \frac{E_2}{E_1}$$

wobei

E_1 : Vorhersagefehler bei Modell 1

E_2 : Vorhersagefehler bei Modell 2

Guttmans Lambda

$$\lambda_Y = \frac{\left(\sum_{i=1}^k \max_j(h_{ij}) \right) - \max_j(h_{\bullet j})}{n - \max_j(h_{\bullet j})}$$

$$\lambda_X = \frac{\left(\sum_{j=1}^m \max_i(h_{ij}) \right) - \max_i(h_{i\bullet})}{n - \max_i(h_{i\bullet})}$$

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^k \max_j(h_{ij}) + \sum_{j=1}^m \max_i(h_{ij}) - \max_j(h_{\bullet j}) - \max_i(h_{i\bullet})}{2n - \max_j(h_{\bullet j}) - \max_i(h_{i\bullet})}$$

Goodmans und Kruskals Tau

$$\tau_Y = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{f_{ij}^2}{f_{i\bullet}} - \sum_{j=1}^m f_{\bullet j}^2}{1 - \sum_{j=1}^m f_{\bullet j}^2}$$

$$\tau_X = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{f_{ij}^2}{f_{\bullet j}} - \sum_{i=1}^k f_{i\bullet}^2}{1 - \sum_{i=1}^k f_{i\bullet}^2}$$

$$\tau = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \frac{f_{ij}^2}{f_{i\bullet}} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \frac{f_{ij}^2}{f_{\bullet j}} - \sum_{j=1}^m f_{\bullet j}^2 - \sum_{i=1}^k f_{i\bullet}^2}{2 - \sum_{j=1}^m f_{\bullet j}^2 - \sum_{i=1}^k f_{i\bullet}^2}$$

5.6 Zusammenhangsanalyse bivariater ordinaler Merkmale

Definition (Konkordante Paare) Gegeben sei die Urliste eines bivariaten Merkmals (X, Y) , wobei X und Y jeweils ordinales Skalenniveau besitzen. Ein Paar $(i, j), i \neq j$, von Einheiten mit den Ausprägungen (x_i, y_i) und (x_j, y_j) heißt

a) *konkordant* (gleichläufig), falls entweder

$$(x_i > x_j \text{ und } y_i > y_j) \quad \text{oder} \quad (x_i < x_j \text{ und } y_i < y_j) \quad \text{gilt.}$$

b) *diskordant* (gegenläufig), falls entweder

$$(x_i > x_j \text{ und } y_i < y_j) \quad \text{oder} \quad (x_i < x_j \text{ und } y_i > y_j) \quad \text{gilt.}$$

c) *ausschließlich in X gebunden*, falls

$$(x_i = x_j \text{ und } y_i \neq y_j) \quad \text{gilt.}$$

d) *ausschließlich in Y gebunden*, falls

$$(x_i \neq x_j \text{ und } y_i = y_j) \quad \text{gilt.}$$

e) *in X und Y gebunden*, falls

$$(x_i = x_j \text{ und } y_i = y_j) \quad \text{gilt.}$$

Ferner bezeichne

- C die Anzahl der konkordanten Paare,
- D die Anzahl der diskordanten Paare,
- T_X die Anzahl der Paare mit Bindungen ausschließlich in X ,
- T_Y die Anzahl der Paare mit Bindungen ausschließlich in Y ,
- T_{XY} die Anzahl der Paare mit Bindungen in X und Y .

Definition (τ_a , τ_b und γ für ordinale Daten) Die Zusammenhangsmaße für ordinale Daten heißen

$$\tau_a := \frac{C - D}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Kendalls *Tau a*,

$$\tau_b := \frac{C - D}{\sqrt{(C + D + T_X) \cdot (C + D + T_Y)}}$$

Kendalls *Tau b* und

$$\gamma := \frac{C - D}{C + D}$$

Goodmans und Kruskals *Gamma*.

5.7 Drittvariablenkontrolle

6 Korrelationsanalyse: Zusammenhangsanalyse stetiger Merkmale

6.1 Korrelationsanalyse

6.1.1 Streudiagramm, Kovarianz- und Korrelationskoeffizienten

6.1.2 Streudiagramme (Scatterplots)

6.1.3 Kovarianz und Korrelation

Definition Gegeben sei ein bivariates Merkmal (X, Y) mit metrisch skalierten Variablen X und Y mit $\tilde{s}_X^2 > 0$ und $\tilde{s}_Y^2 > 0$. Dann heißen

$$\text{Cov}(X, Y) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$

(empirische) Kovarianz von X und Y ,

$$\varrho(X, Y) := \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

(empirischer) Korrelationskoeffizient nach Bravais und Pearson von X und Y , und

$$R_{XY}^2 := (\varrho(X, Y))^2$$

Bestimmtheitsmaß von X und Y .

Verschiebungssatz

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$$

und damit

$$\varrho(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2}}.$$

Transformation $\varrho(X, Y)$ und R_{XY}^2 sind invariant gegenüber streng monoton steigenden linearen Transformationen. Genauer gilt mit $\tilde{X} := a \cdot X + b$ und $\tilde{Y} := c \cdot Y + d$

$$\varrho(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \varrho(X, Y) \quad \text{falls } a \cdot c > 0$$

und

$$\varrho(\tilde{X}, \tilde{Y}) = -\varrho(X, Y) \quad \text{falls } a \cdot c < 0.$$

6.1.4 Weitere Korrelationskoeffizienten

Punkt-Korrelationskoeffizienten Anwendung des Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson auf dichotome nominale Merkmale

- dichotome nominale Merkmale kodiert mit 0 und 1
- Der Punkt-Korrelationskoeffizienten ist identisch zu Φ aus Kapitel 5.3.

Punkt-biseriale Korrelation Anwendung des Korrelationskoeffizienten nach Bravais-Pearson auf eine mit 0 und 1 kodierte dichotome und eine metrischen Variablen.

Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman

- Wir betrachten ein bivariates Merkmal (X, Y) , wobei X und Y nur ordinalskaliert sind, aber viele unterschiedlichen Ausprägungen besitzen.
- Man rechnet statt mit Beobachtungen $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$ mit Rängen $(\text{rg}(x_i), \text{rg}(y_i))_{i=1, \dots, n}$. Dabei ist

$$\text{rg}(x_i) = j : \iff x_i = x_{(j)},$$

- Liegen keine Bindungen vor, rechnet man direkt mit den Rängen.
- Liegen Bindungen vor, so nimmt man den Durchschnittswert der in Frage kommenden Ränge.

Definition (Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman)

$$\varrho_S(X, Y) := \frac{\sum_{i=1}^n \text{rg}(x_i) \cdot \text{rg}(y_i) - n \left(\frac{n+1}{2} \right)^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\text{rg}(x_i))^2 - n \left(\frac{n+1}{2} \right)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (\text{rg}(y_i))^2 - n \left(\frac{n+1}{2} \right)^2}}$$

heißt (empirischer) *Rangkorrelationskoeffizient nach Spearman*.

Liegen keine Bindungen vor, so gilt

$$\varrho_S(X, Y) = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)},$$

wobei $d_i := \text{rg}(x_i) - \text{rg}(y_i)$.

6.2 Regressionsanalyse I: Die lineare Einfachregression

Definition Gegeben seien zwei metrische Merkmale X und Y und das Modell der linearen Einfachregression

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann bestimme man $\hat{\beta}_0$ und $\hat{\beta}_1$ so, dass mit

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i &:= y_i - \hat{y}_i \\ &= y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) \end{aligned}$$

das Kleinste-Quadrate-Kriterium

$$\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2$$

minimal wird. Die optimalen Werte $\hat{\beta}_0$ und $\hat{\beta}_1$ heißen *KQ-Schätzungen*, $\hat{\varepsilon}_i$ bezeichnet das i -te (geschätzte) *Residuum*.

Satz Für die KQ-Schätzer gilt:

$$\text{a) } \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\tilde{s}_X^2} = \varrho(X, Y) \frac{\tilde{s}_Y}{\tilde{s}_X}$$

$$\text{b) } \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{x},$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i = 0.$$

6.2.1 Modellanpassung: Bestimmtheitsmaß und Residualplots

Streuungszerlegung

$$SQT = SQR + SQE$$

mit

- $SQT := \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$
(Gesamtstreuung / Gesamtvariation der y_i : „*sum of squares total*“)
- $SQR := \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2$
(Residualstreuung / Residualvariation: „*sum of squared residuals*“).
- $SQE := SQT - SQR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$
(durch das Regressionsmodell erklärte Streuung: „*sum of squares explained*“)

Bestimmtheitsmaß

$$\frac{SQT - SQR}{SQT} = \frac{SQE}{SQT}.$$

Es gilt:

$$\frac{SQE}{SQT} = R^2_{XY}.$$

6.3 Multiple lineare Regression**Modellgleichung**

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \dots + \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i.$$

Dabei bezeichnet x_{i1} den für die i -te Beobachtung beobachteten Wert der Variablen X_1 , x_{i2} den Wert der Variablen X_2 , usw.

KQ-Prinzip Bestimme $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_p$ so, dass mit

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i := y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \dots + \hat{\beta}_p x_{pi})$$

der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2$$

minimal wird.

Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = \frac{SQE}{SQT}$$

Korrigiertes Bestimmtheitsmaß

$$\tilde{R}^2 := 1 - \frac{n-1}{n-p-1}(1 - R^2)$$

6.3.1 Schema eines Computer-Outputs einer multiplen Regression

	Estimate	Std. Dev.	t	Sig.
(Intercept)	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\sigma}_0$	T_0	p-Wert
X_1	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\sigma}_1$	T_1	"
X_2	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\sigma}_2$	T_2	"
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	"
X_p	$\hat{\beta}_p$	$\hat{\sigma}_p$	T_p	"

6.4 Nominale Einflussgrößen in Regressionsmodellen, Varianzanalyse

Dichotome Kovariable Dichotome Variablen können, sofern sie mit 0 und 1 (wichtig!) kodiert sind, ebenfalls als Einflussgrößen zugelassen werden.

Dummykodierung Man macht aus einer kategorialen Variablen mit k Ausprägungen ($k - 1$) Variablen mit den Ausprägungen 0 und 1. Diese $k - 1$ *Dummyvariablen* dürfen dann in der Regression verwendet werden.

Interaktionseffekte Wechselwirkung zwischen Kovariablen lassen sich durch den Einbezug des Produkts als zusätzliche Kovariable modellieren

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{1i} \cdot x_{2i} + \varepsilon_i$$

Varianzanalyse Ist ein nominales Merkmal X mit insgesamt k verschiedenen Ausprägungen die einzige unabhängige Variable, so führt die Regressionsanalyse mit den entsprechenden $k - 1$ Dummyvariablen auf die sogenannte (einfaktorielle) *Varianzanalyse*:
Das zugehörige Bestimmtheitsmaß wird üblicherweise mit η^2 bezeichnet:

$$\eta^2 = \frac{SQE}{SQT} = \frac{\sum_{j=1}^k n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (y_{ij} - \bar{y})^2}.$$

η^2 und $\eta = \sqrt{\eta^2}$ werden auch als Maße für den Zusammenhang zwischen einer metrischen Variable und einer nominalen Variable verwendet.

6.5 Korrelation und „Kausalität“