

Aufgabe 10 (Vektorraum)

Rekapitulieren Sie die Definition des Vektorraums, welche Sie in der Vorlesung kennengelernt haben, und überlegen Sie sich kurz warum es sich beim

$$\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

tatsächlich um einen Vektorraum handelt.

Aufgabe 11 (Unterraum)

Ist die Gerade...

a) ... $g(x) = \frac{1}{2}x$

b) ... $h(x) = \frac{1}{3}x + 3$

ein Unterraum des \mathbb{R}^2 ?

Aufgabe 12 (Vektorraum, Unterraum)

Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

- Sei V ein beliebiger Vektorraum. Dann ist die Menge $U = \{0\}$, die nur aus dem Nullvektor besteht, ein Unterraum von V .
- Der Unterraum kann nicht die selbe Dimension besitzen wie der Vektorraum.
- Der Durchschnitt zweier Unterräume U_1 und U_2 ist wieder ein Unterraum.

Aufgabe 13 (Wichtige Grundbegriffe)

Gegeben seien die folgenden drei Vektoren aus dem \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

- a) Überprüfen Sie, ob die Vektoren linear unabhängig sind.
- b) Rekapitulieren Sie die folgenden Begriffe aus der Vorlesung:
 - Erzeugendensystem
 - Basis
 - Dimension eines Vektorraums
- c) Erklären Sie, warum die hier angegebenen Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^3 darstellen.
- d) Schlagen Sie eine weitere mögliche Basis des \mathbb{R}^3 vor.
- e) Berechnen Sie den Koordinatenvektor von

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

sowohl bezüglich der von ihnen vorgeschlagenen Basis als auch bezüglich der Basis, welche durch die hier angegebenen Vektoren aufgespannt wird.

Aufgabe 14 (Lineare Unabhängigkeit und Basis)

Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- a) Sind die beiden Vektoren \mathbf{x} und \mathbf{y} linear unabhängig?
- b) Bestimmen Sie den Vektor \mathbf{z} so, dass die Vektoren \mathbf{x} , \mathbf{y} und \mathbf{z} eine Basis des \mathbb{R}^3 aufspannen.