Aufgabe 25 (Norm)

Zeigen Sie, dass durch

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird, wobei $x = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)'$.

Aufgabe 26 (Orthonormalisierung)

Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren auf die Vektoren

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

an.

Aufgabe 27 (Orthogonales Komplement)

Gegeben sei die Ebene

$$E = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ a, \ \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

a) Zeigen Sie, dass E ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $E_\perp$.

Aufgabe 28 (Algorithmus)

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bringen Sie die Matrix auf Dreiecksgestalt, indem Sie explizit den Algorithmus 1.2 (Skript S. 28) heranziehen.

Wiederholungsaufgabe:

Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sowie der Vektor $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Zeichnen Sie den Vektor $\mathbf{y}$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

b) Berechnen Sie das Produkt $\mathbf{By}$ und zeichnen Sie den Ergebnisvektor $\mathbf{b}$ ebenfalls in das Koordinatensystem. Wie lässt sich die mit $\mathbf{B}$ durchgeführte Operation geometrisch interpretieren?

c) Sind die Vektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{y}$ orthogonal? Begründen Sie ihre Antwort.

d) Lösen Sie das Gleichungssystem $\mathbf{Ax}=\mathbf{y}$.

e) Berechnen Sie das Produkt $\mathbf{ABx}$. Warum ist das Ergebnis verschieden von $\mathbf{b}$?