1. Definieren Sie einen eigenen Befehl mit einem Argument für die folgende Gleichung (abzüglich des Satzzeichens):

$$y = a/b + c\,x + d\,x^2 + \frac{1}{e^x} + \epsilon.$$

Wählen Sie das Argument so aus, dass Sie mit dem Befehl auch die nächsten 4 Gleichungen erzeugen können:

$y = a/b + c\,z + d\,z^2 + \frac{1}{e^z} + \epsilon$

$y = a/b + c\,i + d\,i^2 + \frac{1}{e^i} + \epsilon$

$y = a/b + c\,(v+w) + d\,(v+w)^2 + \frac{1}{e^{(v+w)}} + \epsilon$

$y = a/b + c\,y_0 + d\,y_0^2 + \frac{1}{e^{y_0}} + \epsilon$

2. Sei A eine symmetrische (2×2) Matrix:

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= a_{11}a_2 - a_{12}^2 \end{aligned}$$

3. Sei B eine $(n \times m)$ Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}.$$

4. Der Spur-Operator (tr) gibt die Summe der Diagonalelement einer quadratischen Matrix an. Es gelten hierfür einige Regeln:

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(cA + B) &= c\mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) && (1) \\ \mathrm{tr}(A^\top B) &= \mathrm{tr}(AB^\top) \\ &= \sum_{i,j}(A_{ij}B_{ij} && (\circ) \end{aligned}$$

Nachweis von (1) ist ziemlich leicht, ($\circ$) bedarf mehr Aufawnd.

5. In der Quantils-Regression wird eine sogenannte Check-Funktion verwendet. Diese ist gegeben zu:

$$\rho_\tau(u) = \begin{cases} u\tau & \text{für } u \geq 0\,, \\ u(\tau - 1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zu beachten ist, dass $u \in \mathbb{R}$ und $\tau \in (0, 1)$ angenommen wird.

6. Definieren Sie einen eigenen Befehl mit $\overline{\text{einem}}$ Argument für die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung

$$B(k; p, n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, & k \in 0, \ldots, n \\ 0, & k \notin 0, \ldots, n \end{cases}$$

Was wäre wenn man x statt k verwenden würde:

$$B(x; p, n) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x \in 0, \ldots, n \\ 0, & x \notin 0, \ldots, n \end{cases}$$

oder die wenig sinnvolle Parametrisierung mit n:

$$B(n; p, n) = \begin{cases} \binom{n}{n} p^n (1-p)^{n-n}, & n \in 0, \ldots, n \\ 0, & n \notin 0, \ldots, n \end{cases}$$

7. Darstellung der Normalverteilung als Exponentialfamilie:
Schreiben Sie für jeden der Teile einen eigenen Befehl (abzüglich der Satzzeichen):

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}\right)}_{b(x)}\,,$$

$$\underbrace{\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_0^2}\right)}_{c(\mu)}$$

und

$$\exp\left(\underbrace{\frac{x}{\sigma_0^2}}_{t(x)} \underbrace{\mu}_{\gamma(\mu)}\right)\,.$$

Zeigen Sie damit, dass $\{N(\mu, \sigma_0^2) | \mu \in \mathbb{R}\}$ eine Exponentialfamilie darstellt, da gilt:

$$f(x; \mu, \sigma_0^2) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_0^2}\right)}_{b(x)} \underbrace{\exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma_0^2}\right)}_{c(\mu)} \exp\left(\underbrace{\frac{x}{\sigma_0^2}}_{t(x)} \underbrace{\mu}_{\gamma(\mu)}\right).$$