Aufgabe 1 (de Morgan'sche Regeln)

Veranschaulichen Sie die de Morgan'schen Regeln anhand von Venn-Diagrammen:

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Hinweis:
Gehen Sie dabei beispielsweise für a) wie folgt vor:
Stellen Sie für den Ausdruck $\overline{A \cup B}$ zunächst $A \cup B$ dar und daraufhin dessen Komplement. Für $\overline{A} \cap \overline{B}$ stellen Sie zunächst $\overline{A}$ und $\overline{B}$ und darauf deren Durchschnitt dar.

Aufgabe 2 (Verknüpfungen von Mengen)

Gegeben seien die Mengen C und D wie folgt:
$C = \{1, 2, 3, ..., 20\}$, $D = \{11, 12, 13, ..., 30\}$
Zusätzlich soll für die Grundgesamtheit gelten: $\Omega = \{1, 2, 3, ..., 30\}$

a) Geben Sie die folgenden Mengen explizit an:

i) $E_1 = C \cup D$
ii) $E_2 = C \cap D$
iii) $E_3 = (C \cup D) \setminus (C \cap D)$
iv) $E_3 = (C \cap D) \setminus (C \cup D)$
v) $E_3 = (C \cup D) \setminus \overline{(C \cap D)}$

b) Überprüfen Sie die folgenden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt

i) $C \subset D$
ii) $D = \Omega \setminus C$
iii) $C = \Omega \setminus \overline{D}$
iv) $|C| = |D|$
v) $|\overline{C}| = |\Omega| - |\overline{D}|$
vi) $\Omega \setminus (C \cup D) = \{\}$
vii) $C \cup (\Omega \setminus (C \cup D)) = C$

Aufgabe 3 (Mengen formulieren)

Formulieren Sie die folgenden Mengen mathematisch:

1. Die Menge der (reellen) Zahlen größer als 5.
2. Die Menge der (reellen) Zahlen größer als eine beliebige natürliche Zahl.
3. Die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.
4. Die Menge der ungeraden ganzen Zahlen.
5. Die Menge der Teiler einer beliebigen natürlichen Zahl.
6. Eine interessante Beispielmenge, die Sie sich selbst ausgedacht haben.

Hinweise:

1. Wollen sie Aussagen über beliebige Zahlen machen, so geben Sie diesen einen Namen. Für eine beliebige natürliche Zahl könnte das bspw. so lauten: „Sei $k \in \mathbb{N}$."
2. Die Menge der geraden (natürlichen) Zahlen ließe sich bspw. formulieren als:
   $\{ \, y \mid y = 2x \text{ für ein } x \in \mathbb{N} \, \}$.

Aufgabe 4 (Vermischtes)
Berechnen bzw. vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $\frac{b^2xy-bx^2y}{5b^2-5bx}$

b) $\frac{(4cd)^m}{(2c)^m}$

c) $\frac{b^{m+2}\cdot a\cdot c^n\cdot d^{-n}}{a^2\cdot b^2\cdot c^n}$

d) $\sqrt[8]{b^{\frac{4}{5}}}$

e) $\frac{1}{3}\ln(x) - \frac{1}{9}\ln(x^3)$

f) $\sum\limits_{i=1}^{5}(i^2-1)$

Aufgabe 5 (Potenzen und Logarithmus)
Verwenden Sie die Potenz- bzw. Logarithmusgesetze, um die folgenen Ausdrücke zu vereinfachen:

a) $x^{n-3} \cdot x^{2n+5} \cdot x^0$

b) $x^{3m-1} \cdot x^{m-4} \cdot y^3$

c) $\frac{(q^2-36p^2)^{v+1}}{(q+6p)^{v+1}}$

d) $\frac{(10a^5b^6)^3}{(2a^6b^2)^3}$

e) $\ln(e \cdot b) + \ln(e^5 b)$

f) $(\ln(x) + 2\cdot\ln(y)) - (\frac{1}{2}\cdot\ln(y) + 2\cdot\ln(x))$

Aufgabe 6 (Summen- und Produktzeichen)

a) Schreiben Sie die folgenden Summen mit Hilfe des Summenzeichens:

   i) Summe der ersten n natürlichen Zahlen
   ii) Summe der ersten n Quadratzahlen
   iii) Summe der ersten n geraden natürlichen Zahlen

b) Berechnen Sie die folgenden Summen:

i) $\sum\limits_{j=1}^{5} 4j - 1$ ii) $\sum\limits_{k=0}^{4} (2^k - 3)$ iii) $\sum\limits_{v=2}^{6} (v^2 + 1)^2$

c) Sind die folgenden Gleichheiten korrekt?

i) $\sum\limits_{i=1}^{n} (5k + 2) \stackrel{?}{=} 5 \sum\limits_{i=4}^{n} k + 2n$

ii) $\ln(\prod\limits_{l=1}^{n} \frac{2l}{3}) \stackrel{?}{=} \sum\limits_{l=1}^{n} (\ln(2l) - \ln(3))$

iii) $\sum\limits_{k=2}^{n+1} (k-1)^2 \stackrel{?}{=} \sum\limits_{k=2}^{n} (k-1)^2 + ((n+1) - 1)^2$

iv) $\prod\limits_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} \stackrel{?}{=} \lambda^n \cdot e^{-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$

Aufgabe 7 (Gleichungen)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

a) $(5x + 1) - (2x - 5) = 9$

b) $\frac{3x-2}{3x+1} = \frac{1}{2}$

c) $x + |x - 1| = 3$

d) $5 - 3|x - 6| \leq 3x - 7$

e) $e^{2x+4} - e^{x-1} = 0$

f) $\ln(2x + 5) + 4 = 5$

Aufgabe 8 (Allgemeiner Funktionsbegriff)

Seien die Mengen $A := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B := \{1, 3, 5, 7\}$ gegeben.

a) Bei welchen der folgenden Mengen handelt es sich um den Graphen einer Funktion $f : A \to B$? Begründen Sie Ihre Antwort.

i) $G_1 := \{(1, 1), (2, 3), (5, 7)\}$

ii) $G_2 := \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 5), (5, 7)\}$

iii) $G_3 := \{(1, 1), (2, 5), (3, 5), (4, 7), (5, 7)\}$

b) Geben Sie den Graphen einer konstanten Funktion von A nach B an. Wie viele verschiedene konstante Funktionen gibt es?

c) Wie viele verschiedene Funktionen von A nach B gibt es?

Aufgabe 9 (Differentialrechnung)

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f_1(x) := 2x^3 + 5x^2 - 4x + 3$

b) $f_3(x) := \ln(x) \cdot (x^3 + x)$

c) $f_4(x) := \dfrac{\exp(x)}{2 - x^2}$

d) $f_5(x) := \sum_{i=1}^{10} 2^i x^i$

e) $f_6(x) := \ln\big(f_5(x)^4\big)$

f) $f_7(x) := \exp(\sqrt{f_2(x)})$

g) $f_2(x) := 0.5 \cdot 12^x + 3$

h) $f_8(x) := x^x$

Aufgabe 10 (Optimierung)

Ein Schäfer möchte für seine Herde ein möglichst großes, rechteckiges Weidegebiet einzäunen. Ihm stehen insgesamt 300 Meter Zaun zur Verfügung. Wie muss er die Seitenlängen des Zaunes wählen, um die maximale Fläche zu garantieren?

Aufgabe 11 (Exponentielles Wachstum (1))
Ein Seerosenblatt in einem Teich wächst so schnell, dass seine Fläche an jedem Tag doppelt so groß ist wie am Tag zuvor. Nach 48 Tagen ist der Teich vollständig mit dem Seerosenblatt bedeckt. Nach wie vielen Tagen bedeckt das Seerosenblatt exakt die Hälfte des Teichs?

Fällt Ihnen die Antwort auf den ersten Blick auf? Versuchen Sie unabhängig davon, die Antwort auf die Frage formal zu bestimmen.

Aufgabe 12 (Lineare Regression)
Anna bekommt von ihren Eltern 2 Euro Taschengeld pro Woche, die sie vollständig ausgibt. Von seinen 6 Euro Taschengeld bleibt Ben nur 2 Euro am Ende der Woche übrig. Christine gibt 7 ihrer 8 Euro aus.

a) Zeichnen Sie das ausgegebene Taschengeld der Kinder in Abhängigkeit ihres verfügbaren Taschengeldes geeignet in ein Koordinatensystem ein und versuchen Sie, eine Gerade durch die Punkte zu ziehen, die den Zusammenhang zwischen den beiden Variablen möglichst gut erklärt.

b) Berechnen Sie nun die Gleichung der Geraden mit der Form $y = \beta_1 \cdot x$, die den linearen Zusammenhang der beiden Variablen nach dem KQ-Kriterium bestmöglich erklärt. x soll hierbei jeweils das verfügbare und y das ausgegebene Taschengeld der Kinder darstellen, β_1 ist eine reelle Zahl.

Aufgabe 13 (Mathematischer Hintergrund zum logistischen Wachstum)
Gegeben sei die logistische Differentialgleichung

$$f'(x) = \underbrace{c \cdot (K - f(x))}_{=:R(f(x))} \cdot f(x). \tag{1}$$

mit den Konstanten $c > 0$ und $K > 0$. Dabei beschreibe $f(x)$ die Größe einer Population zum Zeitpunkt x.

a) Wie kann man $f'(x)$ inhaltlich interpretieren?

b) Welche Rolle spielt der Term $R(f(x))$ inhaltlich?

c) Betrachten Sie die logistische Funktion

$$f(x) = \frac{K}{[1 + \left(\frac{K}{f_0} - 1\right) e^{-rx}]}.$$

Versuchen Sie, den Verlauf dieser Funktion zu skizzieren.

Hinweis:
Die Größen K, x_0 und r sind hier feste Konstanten mit einer einfachen Interpretation: f_0 ist die Größe der Population zum Zeitpunkt $x = 0$, K ist die Grösse der Population, wenn die Zeit gegen Unendlich geht und r ist ein Maß dafür, wie schnell die Population wächst.

d) Zeigen Sie, dass die logistische Funktion

$$f(x) = \frac{K}{[1 + \left(\frac{K}{f_0} - 1\right) e^{-rx}]}$$

die Differentialgleichung (1) erfüllt, falls $c = \frac{r}{K}$ gewählt wird. Berechnen Sie dazu $f'(x)$ und klammern Sie aus dem erhaltenen Ergebnis den Term $f(x)$ aus. Berechnen Sie dann anschließend den Term $c \cdot (K - f(x))$ und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem vorher bei der Ausklammerung von $f(x)$ aus der Berechnung von $f'(x)$ übgriggebliebenen Teil.

Optionale Zusatzaufgaben

Aufgabe 14 (Der Satz von Sylvester)

Der Satz von Sylvester lautet:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

a) Argumentieren Sie (z.B. grafisch), wieso die Wahrscheinlichkeit des Durchschnitts $A \cap B$ im Satz von $P(A) + P(B)$ subtrahiert werden muss, um $P(A \cup B)$ zu erhalten.

b) Wie kann der Ausdruck $P(A \cap B) + P(A \setminus B) + P(B \setminus A)$ vereinfacht dargestellt werden?

Hinweis:
$P(A)$ meint hierbei z.B. die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses A. Sie können sich darunter zur leichteren Veranschaulichung aber auch den Inhalt einer Fläche A (im Sinne von Venn-Diagrammen) vorstellen. Die Flächen A und B können in diesem Fall auch wieder übereinander liegen.

Aufgabe 15 (Brüche)
Berechnen Sie die folgenden Brüche und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich:

a) $\frac{12a-13b}{24a^2-26ab}$

b) $\frac{16x^2-25y^2}{8x-10y}$

c) $\frac{7b-7a}{a^2+b^2-2ab}$

d) $\frac{18uv}{3w} + \frac{6w}{3uv}$

e) $\frac{2ab}{3c} \cdot \frac{5ac}{2a}$

f) $\frac{12uv}{7r} : \frac{2v}{21r}$

Aufgabe 16 (Lineares Gleichungssystem)
Schwer bepackt ein Eselchen ging und des Eselchen Mutter
und die Eselin seufzte schwer, da sagte das Söhnlein:
Mutter, was klagst und stöhnst du wie ein jammerndes Mägdelein;
Gib ein Pfund mir ab, so trag' ich die doppelte Bürde,
Nimmst Du es aber von mir, gleich viel haben wir dann beide.
Rechne mir aus, wenn Du kannst, mein Bester, wie viel sie getragen![1]

Aufgabe 17 (Lineare und quadratische Funktionen)

a) Weisen Sie nach: Eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := a_1 x + a_0$ ist genau dann streng monoton wachsend, wenn $a_1 > 0$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Vorschrift einer linearen Funktion f, sodass gilt: $(2,3) \in G_f \;\wedge\; (5,7) \in G_f$

c) Sei f die Funktion aus Teilaufgabe b) und $g(x) := -3x + 4$. Bestimmen Sie $G_f \cap G_g$.

d) Sei f eine reelle Funktion und $N := \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$. Wie heißen die Elemente der Menge $G_f \cap N$?

[1] aus Euclidis opera omnia, Ed. Heiberg und Menge, Band VIII, S. 286.

e) Sei nun $f(x) := x^2 - 5x + 3$. Bestimmen Sie $G_f \cap N$. Wie muss $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit für die Funktion $f_c(x) := f(x) + c$ gilt: $G_{f_c} \cap N$ ist einelementig? Für welche c ist die Menge leer?

Aufgabe 18 (Exponentielles Wachstum (2))

Im Jahr 2015 leben auf der Erde ca. 7,336 Milliarden Menschen. Im Jahr 1990 waren es 5,32 Milliarden.

a) Diskutieren Sie, ob Sie die Annahme eines exponentiellen Bevölkerungswachstums für ein sinnvolles/realistisches Modell der Realität halten.

b) Unterstellen Sie nun einen Zusammenhang der Form $f(x) := a \cdot b^x$. Bestimmen Sie die Parameter a und b derart, dass Ihr Modell für die vorhandenen Daten perfekt passt.

c) Welche Bevölkerungsstärke prognostiziert Ihr Modell für das Jahr 2020? In welchem Jahr wäre, Ihrem Modell zufolge, eine Bevölkerungsstärke von 20 Milliarden Menschen erreicht? Diskutieren Sie die Grenzen des Modells.