Zusammenhänge präzisieren im Modell

Dr. Roland Poellinger
Munich Center for Mathematical Philosophy

Begriffsfeld „Logik“

Mathematik und Logik

- Die Mathematik basiert auf logisch gültigen Folgerungsschritten
- Die Logik als Disziplin benutzt mathematische Darstellungsweisen und Begriffe

Philosophie und Logik

- Die Philosophie kann die Logik hinzuziehen, wenn es um die Überprüfung von gültigen Argumenten geht (Test von Prämissen oder Schlussfolgerungen)
- In der Logik stellen wir philosophische Fragen, also das Wesen der Dinge betreffend oder ihr Verständnis, wie auch Fragen nach der Anwendbarkeit eines logischen Systems auf zu beschreibende Strukturen

Sprache und Logik

- Unsere Kommunikation scheint gewissen Regeln zu unterliegen, im Kern vielleicht rein logischen
- In unserer Disziplin müssen wir kommunizieren: Das tun wir mit Sprache(n), also Symbolen, deren Form und Bedeutung wir vorher festlegen müssen – formale Logik, formale Philosophie, etc.

Computer und Logik

- In den 1970er Jahren wurden die ersten Computersysteme entwickelt – Hardware und Software. Dazu haben wesentlich (und bereits viel früher) Logiker beigetragen; ein wichtiges Feld in der Logik ist heute das Thema „Berechenbarkeit“ und die Grenzen der Berechenbarkeit
- Heute tragen Computer zum Lösen logischer Probleme bei: Automatische Beweisverfahren

Von der Sprache zur formalen Struktur

Der klassische Syllogismus bei Aristoteles (384 bis 322 v. Chr.)

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.

Also: Sokrates ist sterblich.

In modernem Gewand (in der Sprache PL1)

$$\forall x(\text{Mensch}(x) \longrightarrow \text{Sterblich}(x))$$
$$\text{Mensch}(s)$$
$$\text{Sterblich}(s)$$

Kommunizieren mit logischen Formeln

Symbole / Formeln / Regeln (Syntax)

beschreiben die Welt in   werden geprüft durch

Modelle / Strukturen (Semantik)

Von einem natürlichsprachlichen Satz zu unserer ersten Struktur

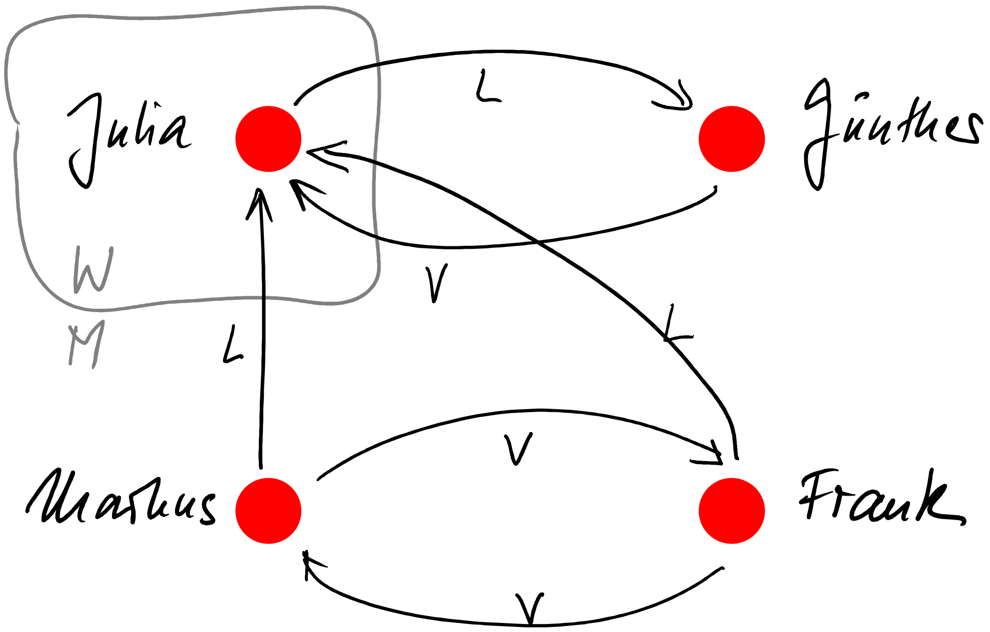
„Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht, oder nachgemachte oder verfälschte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird mit Freiheitsstrafe nicht unter zwei Jahren bestraft.“

… ein einfacheres Beispiel

„Markus liebt Julia, aber Julia liebt Günther“

In diesem Satz finden wir:

1. Individuen (mit Namen)
2. Eigenschaften (Weiblich, Männlich, …)
3. Verhältnisse zueinander (Lieben, …)
4. Verhältnisse von Verhältnissen zueinander: „aber“ (adversativ?)



Logische Notation

Relationale Strukturen, formal

Eine formale, relationale Struktur S besteht aus:

1. D - einer nichtleeren Menge von Individuen (der Objektbereich oder die Domain)
2. E – einer Menge von Eigenschaften (Aussagen über einzelne Individuen)
3. R – Einer Menge von Verhältnissen (Relationen zwischen unseren Individuen)
4. K – Einer Menge von ausgezeichneten Individuen (Namensträgern, Konstanten, …)

Also: S = <D, E, R, K> oder oft einfacher: S = <D, R>

Zur Syntax

- Mengen werden mit Mengenklammern geschrieben: { … }
- Elementschaft: ∈
- Teilmenge: ⊆
- Eigenschaften (Prädikate) sind Teilmengen unserer Individuen $E_1 \subseteq D$
- Mit Prädikaten lassen sich auch Konstanten markieren
- Zweistellige Relationen (Verhältnisse) sind Mengen geordneter Paare < … > und Teilmengen des Kreuzproduktes von D: $R^2{}_1 \subseteq D \times D$
- n-stellige Relationen entsprechend

Unser Viereck

S = <

{julia, günther, markus, frank},
{W, M},
{L, V},
{julia, günther, markus, frank}

>

D
E
R
K

Anmerkung:
D = K, aber es hätte auch „andere unbenannte Personen" x, y, z geben können die geliebt oder verabscheut werden (z.B. Eltern, Geschwister).

Eigenschaften und Relationen im Modell

Unsere Elemente von *S*:

Eigenschaften E:
M = {markus, frank, günther}
W = {julia}

Relationen R:
L = {<markus, julia>, <julia, günther>, <frank, julia>}
V = {<markus, frank>, <frank, markus>, <günther, julia>}

Emotionen, streng mathematisch

Aus der Struktur *S* kann nun abgeleitet werden:

V(markus, frank)

W(julia)

M(frank)

Achtung! Nicht ableitbar ist

non L(julia, markus)

… das lässt sich nur durch Explikation der Lesart und per Definition lösen (z.B. „es gibt nur einen, …“)

Unser Beispielsatz

„Markus liebt Julia, aber Julia liebt Günther“

In Aussagenlogik als Konjunktion: $L_1 \wedge L_2$

mit

L_1:= L(markus, julia)
L_2:= L(julia, günther)

Wird in unserem Modell *S* erfüllt, da:

<markus, julia> ∈ L ✓ und <julia, günther> ∈ L ✓

Wenn wir zu den logischen Konstanten ⋀ ⋁ ¬ → auch noch Quantoren hinzufügen, kriegen wir Relativ- und Indefinitpronomina formal zu fassen …

Fälscherei, formal in PL1

„Wer Banknoten nachmacht oder verfälscht, oder nachgemachte oder verfälschte sich verschafft und in Verkehr bringt, wird mit Freiheitsstrafe nicht unter zwei Jahren bestraft.“

$$\forall x \Big(\exists y \Big(B(y) \wedge \Big[N(x,y) \vee Vf(x,y) \vee \big(\exists z (N(z,y) \vee Vf(z,y)) \wedge Vs(x,y) \wedge Vb(x,y) \big) \Big] \Big) \longrightarrow Bs(x,a) \Big)$$

Frage: Wird der Mann im Hintergrund (z) auch bestraft?

Lieben, funktional

f = L = {<markus, julia>, <julia, günther>, <frank, julia>}

Also: f(julia) = günther
aber: f(günther) = undef.

Demzufolge lassen sich die Eigenschaften der Funktion f beschreiben:

- f ist keine totale Funktion
- f ist nicht injektiv (linkseindeutig): Julia wird von 2 Männern geliebt
- f ist nicht surjektiv (rechtstotal): Nicht jeder wird von jemand anderem geliebt
- f ist deshalb nicht bijektiv (eineindeutig)

Soziale Relationen als Mengen

Die *Partition* unseres Graphen durch M und W lässt sich als Venn-Diagramm verstehen. Und auch L und V können als Mengen (von Tupeln) aufgefasst werden, wenn sie sich auch nicht so einfach in einem Venn-Diagramm abbilden lassen. Auf noch höherer Ebene lässt sich die Menge der Gefühle { V, L } bilden.

Die Mengenlehre liegt im Prinzip aller relationalen Modellierung zugrunde

Aufgabe: Erweitere das Beispiel um zusätzliche *partitionierende* Eigenschaften *Haarfarbe, Wohnort, Hat_Haustier, Nationalität*

Abstraktion, Information, Wahrheit

Abstrakte Modellierung

Wie?

Was?

Modelle sind Abstraktionen der Realität mit Betonung des Wesentlichen (relativ zum gegebenen Problem!)

Wofür?

Was kann alles in relationalen Strukturen modelliert werden?

Einige Beispiele:

- Soziale Beziehungen
- Rechenschritte in einem Computerprogramm
- Physikalisch-räumliche Beziehungen
- Politische Strukturen
- Kausalverhältnisse, Temporalverhältnisse
- Mathematische Strukturen, z.B. die natürlichen Zahlen mit Null und Nachfolger: $<\mathbb{N}, S, \leq, 0>$
- etc.

… eventuell mit geeigneten Erweiterungen der Logik!

Modelle bauen und testen

Formale, relationale Modelle werden in zweierlei Hinsicht eingesetzt:

Modelltest „Model Checking“

Wir haben ein präzises Modell und wollen testen, ob eine gegebene (möglicherweise empirische) Aussage in unserem Modell erfüllt ist, bzw. ob Modell und Formel zueinander passen.

Modellbau „Model Building“

Wir haben eine Menge von Formeln gegeben und wollen uns ein kompatibles Modell dazu bauen, um weitere Fakten ablesen zu können.

Semantische Interpretation von Formeln

Wahrheit ist relativ zum Modell, d.h. eine (logische) Aussage ist wahr in einem Modell (oder bezüglich eines Modells) oder anders formuliert: Ein Modell *erfüllt* eine logische Aussage

→ Das Modell selbst ist nicht *wahr*, sondern *korrekt* oder *adäquat* oder *anwendbar* etc. …

Theorien in der Logik

Zu einem konkreten Modell M lässt sich eine Theorie T angeben:

T ist die Menge aller Sätze, die sich aus M ableiten lassen.

Oder wir geben eine Theorie für eine ganze Menge **M** von Modellen an:

T ist dann die Menge aller Sätze, die sich aus jedem Modell in **M** ableiten lassen.

Reden über Modelle

Um über Modelle, ihre Theorien, oder Beziehungen zwischen Strukturen zu sprechen, wechseln wir von der Objektsprache in die Metasprache.

Formel in der Objektsprache

Beispiel:

$$Th(M) := \{\phi \in Sent_{\mathcal{L}} \mid M \models \phi\}$$

Metasprachliche Beziehung
zwischen Modell und Formel

Formale Philosophie

Formalisierungsprobleme

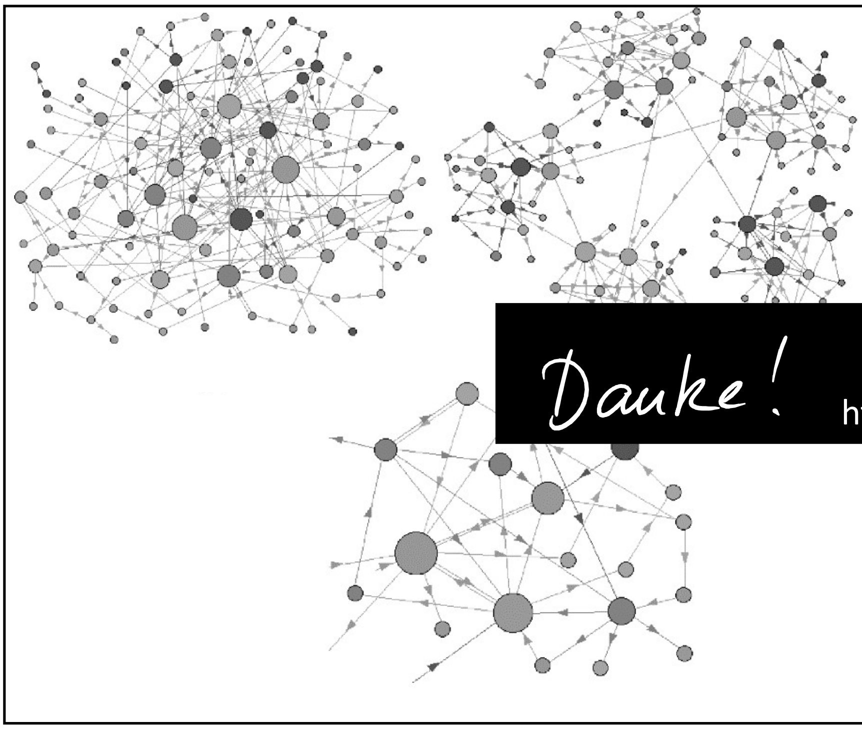
- Paradoxien (z.B. das Lügnerparadoxon)
- Konditionalsätze:
  - Wenn es regnet, wird die Straße nass
  - Wenn Oswald JFK nicht erschossen hätte, dann würde JFK noch leben.
- Kausalzusammenhänge: Ursache und Wirkung
- Wissen, Glauben, Glaubensänderung und Lernen
- Und in der Wissenschaftstheorie: Wie verhalten sich *Theorien* in den verschiedenen einzelnen Wissenschaften? Wie funktioniert Fortschritt? Wie wird eine Hypothese bestätigt?

Was kann **nicht** formalisiert werden?

Leseempfehlungen

- Godehard Link: Collegium Logicum
- Lauth/Sareiter: Wissenschaftliche Erkenntnis
- Graham Priest: Logic. A Very Short Introduction

+ MCMP on iTunes U
+ MCMP Curated Collections



Danke!

Dr. Roland Poellinger
r.poellinger@lmu.de
http://logic.rforge.com