Auf Du und Du mit Statistik und Co.

LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Einführung ins Formalisieren für Mathe-Frustrierte

6 Thementage mit Hands-on-Sessions und Online-Forum

4.–7., 10., 11. Okt.

Alles zu Themen, Zeit und Ort:
www.statistik.lmu.de/formprop

Auf Kriegsfuß mit Mathe und Statistik? Warum wird ständig und überall formalisiert?

Wir bieten eine sanfte Einführung in die wichtigsten Grundlagen an, die gerade in den geistes-, sozial- und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengängen überraschend stark an Bedeutung gewinnen.

Gestaltung: Roland Poellinger / rforge.com

Organisation: Studienbüro Statistik / Mathematische Philosophie
Hunger auf mehr? Info online: www.statistik.lmu.de/formprop

Propädeutikum

Formal(isiert)es Denken und empirisches Argumentieren

Thomas Augustin, Christiane Didden, Denise Gawron, Christoph Jansen, Julia Plaß, Roland Poellinger, Georg Schollmeyer, Tobias Steinherr[1]

Oktober 2016

[1] Vielen Dank auch an Almond Stöcker!

Teil I

Die Allgegenwärtigkeit formal(isiert)en Denkens

1 Vorbemerkungen

Interdisziplinäres Team: Statistik und Mathematische Philosophie

- Thomas Augustin
- Christiane Didden
- Denise Gawron
- Christoph Jansen
- Julia Plaß
- Roland Poellinger
- Georg Schollmeyer
- Tobias Steinherr

- Dank auch an Almond Stöcker!

Spontan: Ihre Erwartungen

Das Konzept: inhaltlich

- Experimentell, auf Not reagieren
- Förderung durch zentrale Studienzuschüsse
- Nicht nochmals durch Schulmathematik hetzen
- Entscheidend: “Denke“ herausarbeiten:
  Wie ticken formal arbeitende Wissenschaftler(innen)?

Auch die formale “Denke” kann man lernen!

- Passiv
- und sogar aktiv
- so viel braucht man nicht, um ersten Nutzen daraus ziehen zu können

- Formalisierung nicht als exklusive Alternative, sondern als Erweiterung!

Das Konzept: Umsetzung(svorschlag)

- Vorlesung
- Übung
- Nachbetreuung
  - + Wir begleiten Sie, wenn's hart wird.
  - + Unterstützung bei Forums-Eigeninitiative
  - + Sprechstunden

- Aktiv tun!
  + Es gibt keine Noten. Alles was gelingt, hilft; alles was misslingt, schadet nicht.
  + Wir müssen Ihre genauen Bedürfnisse kennenlernen.
  + Wir unterstützen Sie v.a. bei dem Problem, wie man bei einer Frage anfängt. In der Übung “teaching by walking around“.

Kurzer Überblick über die 5 Themenbereiche

- Vorlesung 1: Warum wird ständig formalisiert?
- Vorlesung 2: Algebraische Grundlagen
- Vorlesung 3: Funktionsbegriff und elementare Kurvendiskussion
- Vorlesung 4: Von der Punktewolke zum Zusammenhang
- Vorlesung 5: Zusammenhänge präzisieren im Modell

Vorläufiges Programm:

Datum	Thema	Material
04.10.2016 9:15-12:00 Uhr Lehrturm W 201 (Professor Huber Platz 2)	**Warum wird ständig formalisiert?** (Dozent: Augustin)	
04.10.2016 ab 13:00 Uhr Lehrturm W 201 (Professor Huber Platz 2)	**Algebraische Grundlagen** (Dozentin: Plaß)	
05.10.2016 9:00-12 Uhr ab 13:00 Uhr (open end) Raum 030, Schellingstraße 4	 **Funktionsbegriff und elementare Kurvendiskussion** (Dozent: Jansen) **Übungssession**	

06.10.2016 13:00-16:00 Uhr Raum A214 (HGB)	**Von der Punktewolke zum Zusammenhang** (Dozent: Schollmeyer)	
07.10.2016 ab 9:00 Uhr (open end) Raum A214 (HGB)	**Übungssession**	
10.10.2016 15:00 -18:00 Uhr Raum A120 (HGB)	**Zusammenhänge präzisieren im Modell** (Dozent: Poellinger)	
11.10.2016 15:00 -18:00 Uhr Raum A120 (HGB)	**Übungssession und Abschlussrunde**	

Zwei von vielen möglichen Literaturvorschlägen

- Cramer E. & Neslehova J. (2015): *Vorkurs Mathematik: Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen.* (6. Auflage, Medienreihe zur angewandten Statistik). Springer, Berlin.

  * kann über die UB elektonisch bezogen werden

  * viele Aufgaben (mit Lösungen)

- Mathe für Nicht-Freaks:
  `https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks`
  aufgerufen am 28.9.16

Woher kommen Sie?

Spontan: Brainstorming zur Formalisierung

- Was ist eigentlich Formalisierung?
- Wo kommt sie (nicht) vor?
- Was sind ihre Vorteile?
- Welche Nachteile besitzt sie?
- . . .

2 Formalisierung, formale Methoden (informell), Begriffseinordnung

Wissenschaft versus Alltagserfahrung

Nomothetischer Ansatz

- Suche nach “Gesetzmäßigkeiten“
- Hier vorwiegend Gesetze über dichotome Eigenschaften (ja/nein)
- wie sieht ein Gesetz aus ?
- Beziehung zwischen Eigenschaften
- Beziehung zwischen Größen
- “Syllogismus“

DAS Beispiel

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
$\rightarrow$ Sokrates ist sterblich

- Wichtig: Gesetze produzieren Erkenntnisse über beliebige Einzelfälle, die in ihren Geltungsbereich fallen. Sobald wir wissen, dass Max ein Mensch ist, wissen wir, dass Max sterblich ist.

- Das heisst: Wir können Aussagen $ableiten$.

Beispiel (Fortsetzung)

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
$\Rightarrow$ Sokrates ist sterblich.

- Alle Menschen sind sterblich.

- Tatze ist ein Teddybär (, und Teddybären sind keine Menschen).

Beispiel (Fortsetzung)

Alle Menschen sind sterblich.
Sokrates ist ein Mensch.
$\Rightarrow$ Sokrates ist sterblich.

- Alle Menschen sind sterblich.

- Tatze ist ein Teddybär (, und Teddybären sind keine Menschen).

- Alle Menschen sind sterblich.

- Maja ist eine Biene (,und Bienen sind keine Menschen).

- Beziehung nicht notwendig umkehrbar!!

Schließen zwischen quantitativen Größen

- Korrelativ versus kausal

Ein formalistisches Verständnis von Theorie

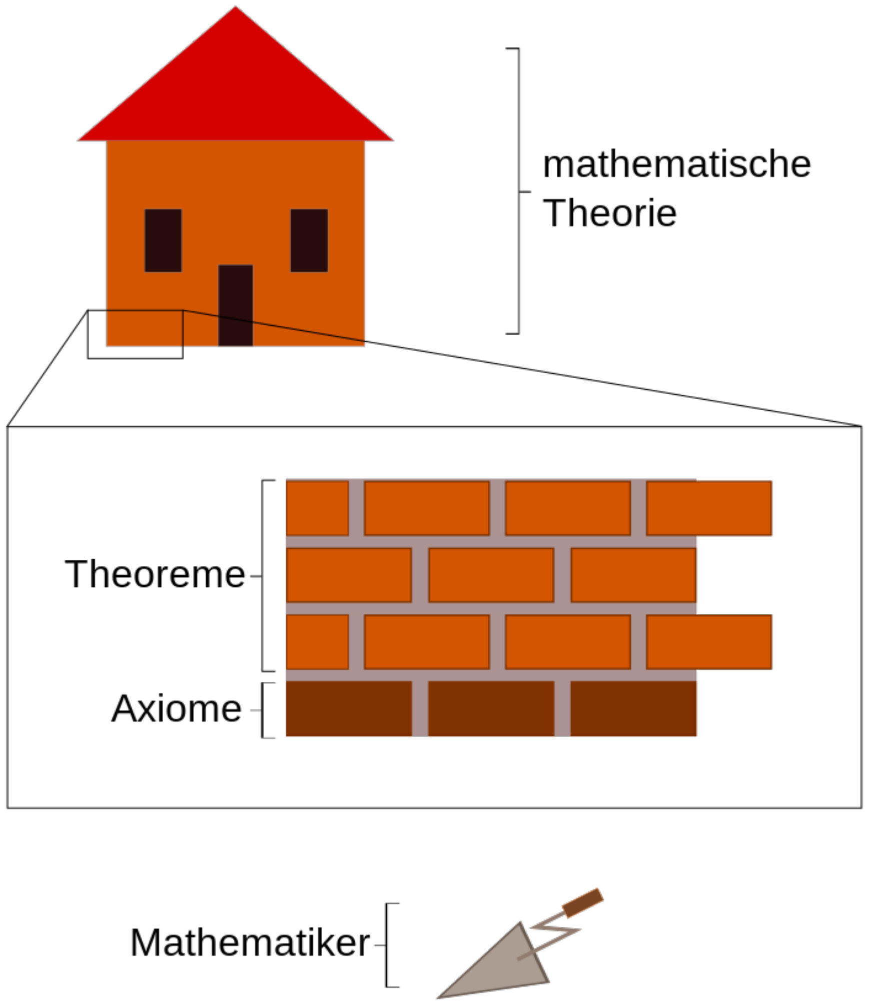
- Mehrere (sich nicht widersprechende) Gesetze
- Schlussregeln
  wie kombiniert man Aussagen?
- abgeleitete Theoreme
- Gegenteil: falsche Aussagen
- typischerweise gibt es nicht beurteilbare Aussagen

- Nebenbemerkung:
  Modern: Schlüsse müssen nicht ausnahmslos gelten, sondern “probabilistisch“ (wahrscheinlichkeitsbezogen)
  Wenn ..., dann steigt die Wahrscheinlichkeit (das Risiko), dass ...

Axiome

- Die Grundaussagen einer formalisierten Theorie

- Also Axiome $+$ Schlussregeln $\rightarrow$ abgeleitete Theoreme



`https://de.wikibooks.org/wiki/Mathe_f%C3%BCr_Nicht-Freaks:_Was_ist_Mathematik%3F`
aufgerufen am 26.9.16

Exkurs: Typen von Sätzen in einem formal gestalteten Text

Fast beliebiges Beispiel (Bronevich, I., Rosenberg, I. (2015): The generalization of the conjunctive rule for aggregating contradictory sources of information based on generalized credal sets. In: Augustin, T., Doria, S., Miranda, E., Quaeghebeur, E. (Hg.). Proeceedings of the Ninth Symposium on Imprecise Probabities and Their Applications (ISIPTA '15, Pescara (I)), SIPTA, Manno.)

Proposition 2 *The order $\preceq$ is equivalent to the order $\leq$ on the set $\overline{M}_{pr}$. In addition if $Bel \leq P$ for $P \in \overline{M}_{pr}$ and $Bel \in \overline{M}_{Bel}$, then $Bel \preceq P$. Furthermore,*

$$Bel(A) = \inf\{P(A) | P \in \mathbf{P}(Bel)\},$$

where $\mathbf{P}(Bel) = \{P \in \overline{M}_{pr} \big| Bel \preceq P\}$.

Remark 1 Proposition 2 shows that in evidence theory any belief function can be equivalently represented by $\mathbf{P}(Bel)$ that may be called a generalized credal set. Such a construction with a slightly different definition will be introduced in the next section. Clearly, the above proposition allows us to write

$$\mathbf{P}(Bel) = \{P \in \overline{M}_{pr} \big| Bel \leq P\}.$$

Let $Bel_1, Bel_2 \in \overline{M}_{bel}$. Then we denote by $R(Bel_1, Bel_2)$ the set of all possible belief measures that can be obtained by C-rules applied to Bel_1 and Bel_2. Then the amount of contradiction between Bel_1 and Bel_2 by C-rules can be computed as

$$Con(Bel_1, Bel_2) = \inf\{Bel(\varnothing) \big| Bel \in R(Bel_1, Bel_2)\}.$$

Let us observe that this measure of contradiction (or conflict) is considered in many papers [4, 5, 6, 10], where authors show that $Con(Bel_1, Bel_2)$ has better properties than a measure of contradiction based on the classical C-rule.

Proposition 3 *Let* $\mathbf{P}(Bel_i) = \{P \in \overline{M}_{pr} \big| Bel_i \leq P\}$, *where* $Bel_i \in \overline{M}_{bel}$, $i = 1, 2$. *Then*

$$Con(Bel_1, Bel_2) = \inf\{P(\varnothing) | P \in \mathbf{P}(Bel_1) \cap \mathbf{P}(Bel_2)\}.$$

Thus, in this section we has shown that it is possible to extend the model of non-normalized belief functions on more general theories of imprecise probabilities using generalized credal sets, and this problem will be investigated in the next sections.

6 The Conjunctive Rule for Probability Measures Admitting Contradiction

Let us consider the case when we have two sources of information described by probability measures P_1 and P_2. These sources of information are absolutely contradictory if we can divide the space X on two disjoint subsets A and B such that $P_1(A) = 1$ and $P_2(B) = 1$. In other words, sources of information support that events A and B are certain, but it is not possible because these events are disjoint. In classical logic false implies anything, thus we can write

$$P_1 \wedge P_2 = \bigwedge_{P_i \in M_{pr}} P_i = \eta^d_{\langle X \rangle},$$

where $\eta^d_{\langle X \rangle}$ describes the result of conjunction of all possible probability measures on 2^X. Now we will try to generalize the above rule for two probability measures that are not absolutely contradict each other. In this case we can divide probability measures on 2 parts:

$$P_1 = (1-a)P_1^{(1)} + aP_1^{(2)}, \quad P_2 = (1-a)P_2^{(1)} + aP_2^{(2)},$$

where $a \in [0,1]$, $P_k^{(i)} \in M_{pr}$, $i = 1, 2$, $k = 1, 2$, and $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ are parts of probability measures that don't contradict each other, i.e. $P_1^{(1)} = P_2^{(1)}$, and probability measures $P_1^{(2)}$, $P_2^{(2)}$ are absolutely contradict each other. The value

$$Con(P_1, P_2) = a = 1 - \sum_{x_i \in X} \min\{P_1(\{x_i\}), P_2(\{x_i\})\}$$

is called the *amount of contradiction* and the above measures are defined by the following formulas:

$$P_1^{(1)}(\{x_i\}) = P_2^{(1)}(\{x_i\}) = \frac{1}{1-a} \min\{P_1(\{x_i\}), P_2(\{x_i\})\},$$

where $x_i \in X$ and $a < 1$ (if $a = 1$, then a measure $P_1^{(1)} = P_2^{(1)}$ is defined arbitrary);

$$P_1^{(2)}(\{x_i\}) = \frac{1}{a}\left(P_1(\{x_i\}) - (1-a)P_1^{(1)}(\{x_i\})\right),$$

$$P_2^{(2)}(\{x_i\}) = \frac{1}{a}\left(P_2(\{x_i\}) - (1-a)P_2^{(1)}(\{x_i\})\right),$$

where $x_i \in X$ and $a > 0$ (if $a = 0$, then absolutely contradictory measures $P_1^{(2)}$, $P_2^{(2)}$ are defined arbitrary).

Example 1 Assume that $X = \{x_1, x_2, x_3\}$. In this example any probability measure P can be described by a vector $\left(P(\{x_1\}), P(\{x_2\}), P(\{x_3\})\right)$. Let the probability measures P_1 and P_2 be defined by the following vectors: $P_1 = (0.4, 0.2, 0.4)$ and $P_2 = (0.2, 0.4, 0.4)$. Then $a = 0.2$, $P_1^{(1)} = P_2^{(1)} = (0.25, 0, 25, 0.5)$, $P_1^{(2)} = (1, 0, 0)$, and finally $P_2^{(2)} = (0, 1, 0)$.

Let us observe that measures $P_1^{(2)}$, $P_2^{(2)}$ are absolutely contradictory, because $P_1^{(2)}(\{x_1\}) = 1$ and $P_2^{(2)}(\{x_2\}) = 1$ for disjoint sets $\{x_1\}$ and $\{x_2\}$.

Summarizing we introduce the following definition.

Definition 1 The C-rule for probability measures $P_1, P_2 \in M_{pr}$ is defined as

$$P_1 \wedge P_2 = \sum_{x_i \in X} \min\{P_1(\{x_i\}), P_2(\{x_i\})\} \eta_{\langle \{x_i\} \rangle} + a\eta^d_{\langle X \rangle},$$

where $a = 1 - \sum_{x_i \in X} \min\{P_1(\{x_i\}), P_2(\{x_i\})\}$.

Example 2 Consider probability measures P_1 and P_2 from Example 1. Then

$$\begin{aligned} P_1 \wedge P_2 &= 0.8P_1^{(1)} + 0.2\eta^d_{\langle X \rangle} \\ &= 0.2\eta_{\langle \{x_1\} \rangle} + 0.2\eta_{\langle \{x_2\} \rangle} + 0.4\eta_{\langle \{x_1\} \rangle} + 0.2\eta^d_{\langle X \rangle}. \end{aligned}$$

Exkurs: Typen von Sätzen in einem formal gestalteten Text

Zur Strukturierung beim Lesen nutzen!!

- Theorem (auch “Satz“ in einem mathematischen Sinn)
- Definition
- weiteres
  - Korollar
  - Lemma
  - Proposition
  - Bemerkung
  - Beispiel
  - Gegenbeispiel
- Ferner: Tautologie

Eine (nicht ernst gemeinte) Theorie der Fankonflikte

I Alle Menschen sind Anhänger genau eines Fußballclubs.

II Anhänger(innen) von verschiedenen Fussclubs mit Lokalrivalität reden nicht miteinander.

III Freunde/-innen reden miteinander.

$\Rightarrow$ 1) Anhänger((innen) von Fußballclubs mit Lokalrivalität sind keine Freunde/innen

$\Rightarrow$ 2) Freunde/innen sind nicht Anhänger(innen) von verschiedenen Fußballclubs mit Lokarivalität.

- Max ist Bayern-Fan, Paul ist Sechziger $\Longrightarrow$

  * Max und Paul reden nicht miteinander.

  * Max und Paul sind keine Freunde

- Clarrissa und Metchild reden miteinader $\Longrightarrow$ Clarrisa und Mechthild sind nicht Anhänger von Fußballclubs mit Lokarivalität.

  aber nicht: Clarissa und Mechthild sind Freundinnen.

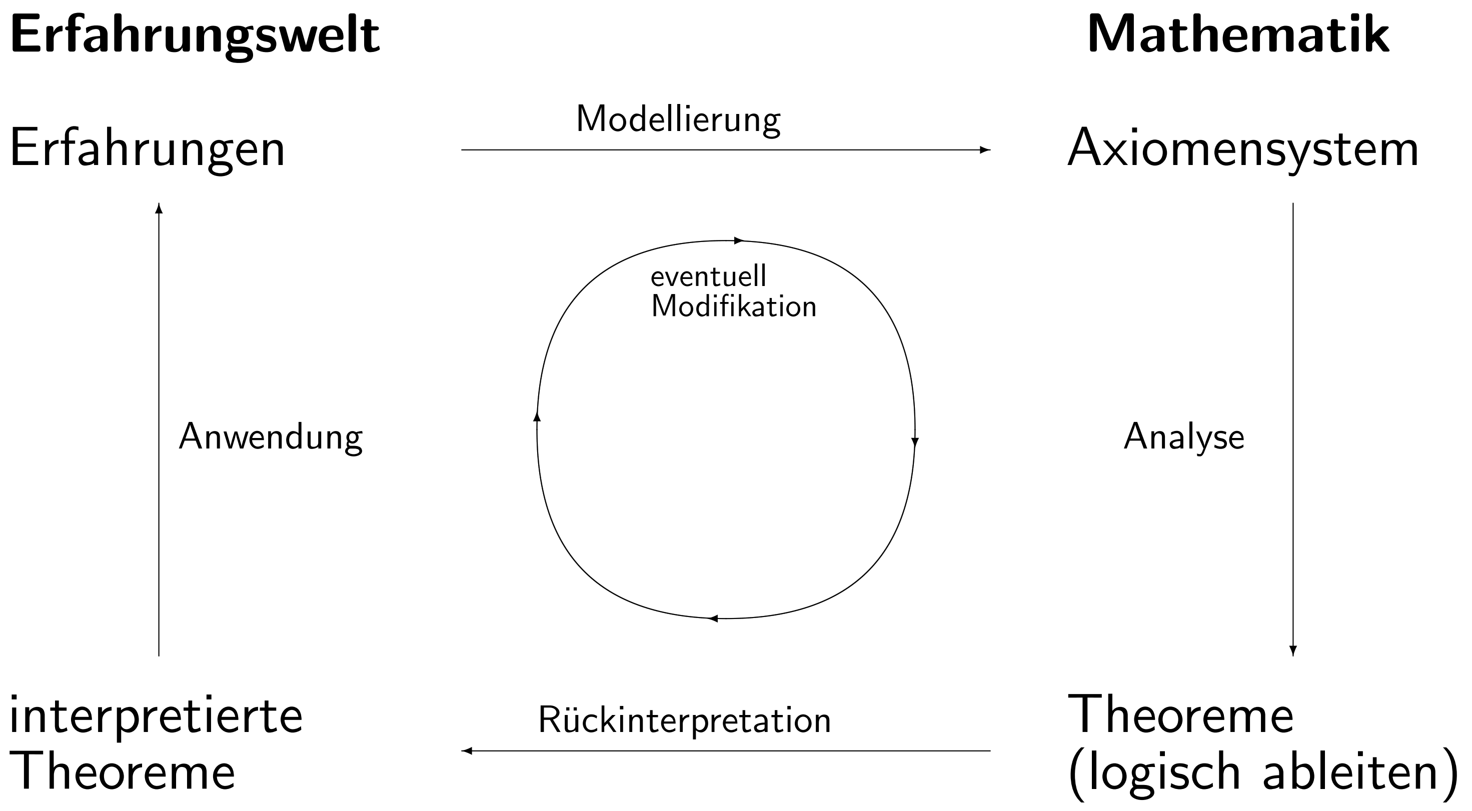
Wichtig: Für alle Elemente, die zum Gegenstandsbereich des formalen Systems gehören, also die Axiome erfüllen, gelten die Folgerungen.

Anforderungen an ein Axiomensystem

- formale Anforderungen
  * gegenseitige Widerspruchsfreiheit
  * Minimalität
    Kein Axiom ist aus dem Rest herleitbar.
    Lässt man ein Axiom weg, dann weiß man weniger.
- Möglichst große Vollständigkeit
- “Realitätsbezug“
  * keine “falschen Erkenntnisse vorausetzen“
  * wohl auch Relevanzproblem

3 Axiomatisieren, Modellieren, Formalisieren

Axiomatisieren als Modellieren, Modellieren durch Axiomatisieren

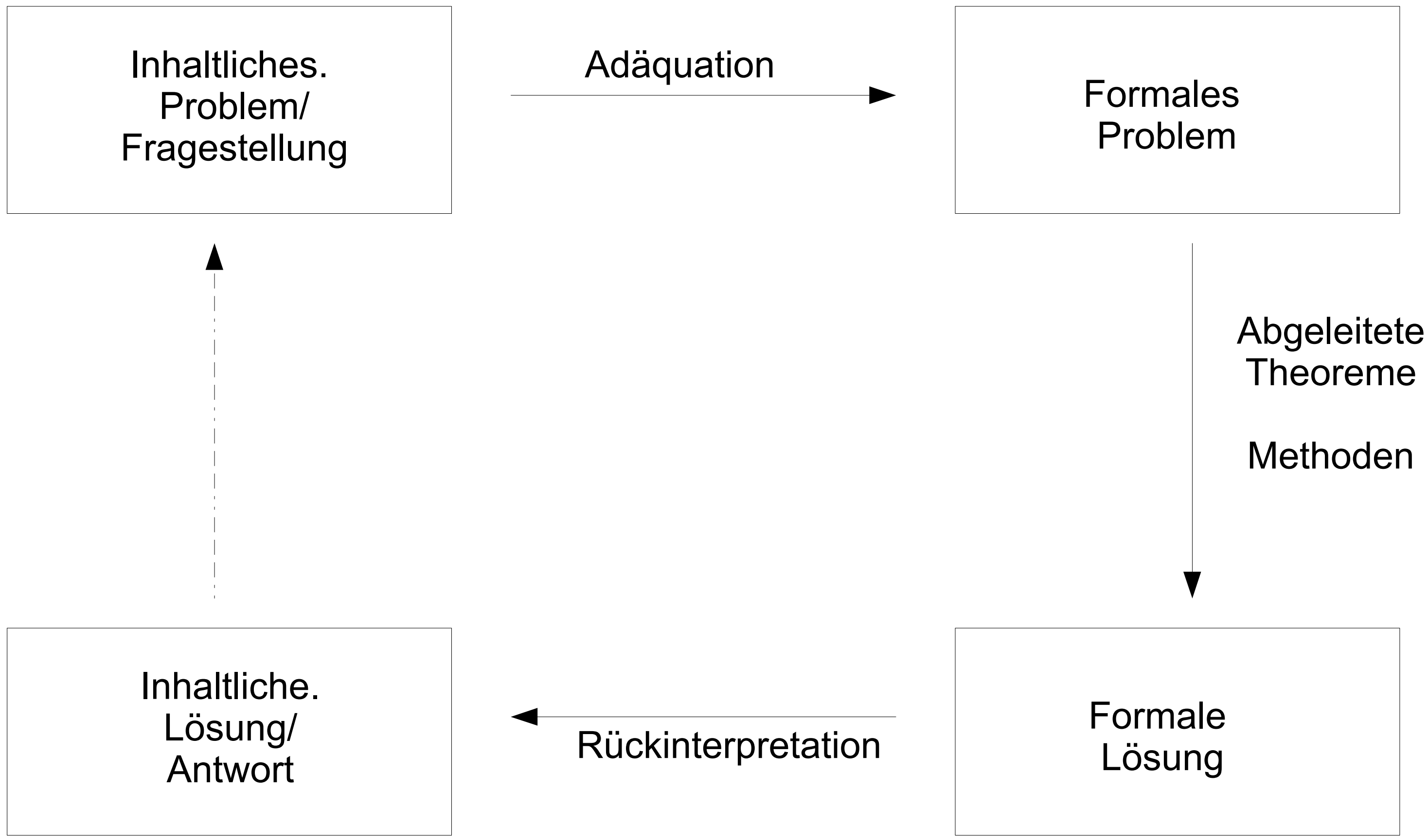


Aus: Behnen, Neuhaus (1987^2): Grundkurs Stochastik. Teubner, S. 9

- Beispiel Watzlawicks Axiomensystem der Kommunikation

  `www.paulwatzlawick.de/axiome.html` aufgerufen am 28.9.2016

Formalisierung (z.B. Statistik)



Operationalisierung

4 Vorteile und Nachteile (Grenzen) des Formalisierens

- Abstrahieren

- Präzisieren

  * von Begriffen
    Intension
    Extension

  * von Beziehungen, Abfolgen, Wirkungsrichtungen
    des Sinngehalts (etwa deskriptive versus normative Aussagen)

  * von Verknüpfungen
    inklusives/exklusives “oder“

  * von impliziten Annahmen

- Prognostizieren: "'"Dualität von Erklärung und Prognose"

- Analogieschlüsse: Strukturelle Gemeinsamkeiten erkennen

- Prägnanz

- Kanonisierung und Intersubjektivität

- Umgangssprache ist reicher

- Kann immer alles Wesentliche im Abstraktionsprozess enthalten sein?

Totalität sozialer Systeme !?

- Problemgerechte, statt universelle Anwendung formaler Methoden

- Zu der sauberen Charakterisierung einer wissenschaftlichen Methode gehört auch eine Spezifikation ihres Gegenstandbereichs.

Formalisierung heißt nicht notwendig

- Quantifizierung
- Legitimierung
- Verabsolutierung

5 Mengenlehre

Überblick

- Menge
- Grundmenge
- Venn-Diagramm
- Durchschnitt
- leere Menge
- Vereinigung
- Teilmenge: auch als Formalisierung des Schließens mit dichotomen Eigenschaften
- einige weitere Konzepte

Definition 5.1. *Menge, Element*

Eine Menge ist eine Zusammenfassung unterscheidbarer Objekte. Die zu einer Menge gehörenden Objekte heißen *Elemente* der Menge.

Bem. 5.2.

- Dabei wird implizit vorausgesetzt, dass für jedes Objekt eindeutig feststellbar sein, ob es zu der Menge gehört oder nicht. (Erweiterung „Fuzzy Sets“). In der Praxis ist die die räumliche, zeitliche und inhaltliche Abgrenzung einer Menge oft schwierig.

- Mengen werden in der Statistik auch benutzt, um den Ausgang von Zufallsexperimenten zu beschreiben.

Darstellung von Mengen

muss eindeutig sein

- aufzählende Darstellung
- beschreibende Darstellung

Bsp. 5.3.

- $M = \{$Hörende dieser Vorlesung$\}$.
- $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ (Menge der Ergebnisse eines Würfelwurfs).

  Die Reihenfolge der Aufzählung spielt (im Gegensatz zu Tupeln) keine Rolle:

  $$\{1,2,3,4,5,6\} \; = \; \{1,3,5,2,4,6\}$$

  Jedes Element wird nur einmal genannt.
- $M = \{K, Z\}$ (Menge der Ergebnisse eines Münzwurfs, K=Kopf, Z=Zahl).

- Beschreibende Darstellung: Charakterisierung von Mengen mit einer gewissen Eigenschaft:

  $$\{1,2,3,\ldots,10\} = \{x \,|\, x \text{ ist eine natürliche Zahl } \leq 10\}$$

  Die Menge aller x mit der Eigenschaft „x ist eine natürliche Zahl ≤ 10“.

Definition 5.4. *Variable*

Eine Variable ist eine Bezeichnung (Platzhalter) für ein Objekt, das verschiedene Werte aus einer Menge von Elementen annehmen kann.

Bsp. 5.5.

Variablen repräsentieren z.B

- Zahlen, dann meist mit kleinen lateinischen Buchstaben $a, b, c, \ldots, x, y, z$ bezeichnet
- Mengen, dann meist mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \ldots,$ M, N, O, P bezeichnet, auch Ω üblich (s.u.)
- Funktionen, dann meist mit großen oder kleinen lateinischen Buchstaben F, G, H, f, g, h bezeichnet
- spezielle Zahlenmengen, dann meist bezeichnet mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ für natürliche, rationale und reelle Zahlen

Die leere Menge $\varnothing$

Grundlegende Begriffe der Mengenlehre: Illustration anhand der Mengen

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{\text{CDU/CSU, SPD, FDP, Grüne, Linke, Sonstige}\} \\
A &= \{\text{CDU/CSU, SPD, FDP, Grüne}\} \\
B &= \{\text{CDU/CSU, SPD, FDP}\} \\
C &= \{\text{SPD, FDP, Grüne}\}
\end{aligned}$$

- **Elementeigenschaft:**

  x ist Element der Menge M: $\quad x \in M$

  x ist nicht Element der Menge M: $\quad x \notin M$

- **Teilmengen:** M_1 ist Teilmenge von M_2, in Zeichen $M_1 \subset M_2$, wenn jedes Element von M_1 auch in M_2 ist.

Für jede Menge M gilt:

$\emptyset \subset M$ Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge, denn jedes Element in $\emptyset$ ist in M
(Aussagen über den leeren Quantor sind wahr)

$M \subset M$ d.h. „ $\subset$ “ enthält implizit „ = “,
deshalb in Literatur manchmal auch $\subseteq$ statt $\subset$ geschrieben

- **Schnittmenge:** Die Schnittmenge $M_1 \cap M_2$ ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind:

$$M_1 \cap M_2 = \{x | x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$$

Weitere Eigenschaften:

* Gilt $M_1 \subset M_2$, so ist $M_1 \cap M_2 = M_1$.

* Für jede Menge M_1 gilt: $M_1 \cap M_1 = M_1$ und $M_1 \cap \emptyset = \emptyset$.

* Zwei Mengen M_1 und M_2 mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, d.h. zwei Mengen, die kein gemeinsames Element haben, heißen *disjunkt*.

* Die Schnittmenge aus n Mengen $M_1, \ldots, M_n$ enthält alle Elemente, die in jeder der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ enthalten sind und wird bezeichnet mit

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n.$$

- **Vereinigungsmenge:** Die Vereinigungsmenge $M_1 \cup M_2$ ist die Menge aller Elemente, die in M_1 oder M_2 enthalten sind:

$$M_1 \cup M_2 = \{x | x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$$

Bem. 5.6.

* Vorsicht: Das „oder“ ist $nicht$ exklusiv gemeint, also nicht „entweder oder“, sondern als „in M_1 oder in M_2 oder in beiden“.

* Die Vereinigungsmenge aus n Mengen $M_1, \ldots, M_n$ enthält alle Elemente, die in mindestens einer der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ enthalten sind und wird bezeichnet mit

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$$

- **Differenzmenge:** Die Differenzmenge $M_1 \setminus M_2$ ist die Menge aller Elemente, die in M_1, aber nicht in M_2 enthalten sind:

$$M_1 \setminus M_2 = \{x | x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$$

Im Beispiel:

- **Komplementärmenge:** Die Komplementärmenge $\overline{M}$ bezüglich einer Grundmenge Ω ist die Menge aller Elemente von Ω, die nicht in M sind:

$$\overline{M} = \{x \in \Omega | x \notin M\} = \{x : x \notin M\}$$

Im Beispiel:

Bem. 5.7.

* Die Komplementärmenge ist nur unter Bezugnahme auf eine Grundmenge Ω definierbar.

* Es gilt $\overline{M} = \Omega \setminus M$.

* Es existieren noch weitere Schreibweisen für die Komplementärmenge, z.B. M^C, $\mathcal{C}M$.

* „Tertium non datur“ (Grundlegendes Prinzip der Mengenlehre (und der Logik)): Für jedes Element $x \in \Omega$ gilt entweder $x \in M$ oder $x \in \overline{M}$

- **Potenzmenge:** Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist die Menge aller Teilmengen von M:

$$\mathcal{P}(M) = \{N | N \subset M\}.$$

Im Beispiel:

$$\mathcal{P}(B) \quad =$$

- **Mächtigkeit:** Die Mächtigkeit $|M|$ einer Menge M ist die Anzahl der Elemente von M

  Im Beispiel:

Rechenregeln für Mengen

1. Kommutativgesetze (Vertauschung):

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1, \quad M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1.$$

2. Assoziativgesetze (Zusammenfassen):

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3).$$
$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3).$$

3. Distributivgesetze (Ausklammern/Ausmultiplizieren):

$$(M_1 \cup M_2) \cap M_3 = (M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3).$$

$$(M_1 \cap M_2) \cup M_3 = (M_1 \cup M_3) \cap (M_2 \cup M_3).$$

4. De Morgansche Regeln:

$$(\overline{M_1 \cup M_2}) = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$$

$$(\overline{M_1 \cap M_2}) = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$$

5. Aus $M_1 \subset M_2$ folgt $\overline{M_2} \subset \overline{M_1}$.

6. Für die Differenzmenge gilt $M_1 \setminus M_2 = M_1 \cap \overline{M_2}$.

7. Für die Potenzmenge gilt $|\mathcal{P}(M_1)| = 2^{|M_1|}$.

Das kartesische Produkt

Das kartesische Produkt zweier Mengen

$$M = \{m_1, m_2, m_3, \cdots, m_k\}$$
$$N = \{n_1, n_2, n_3, \cdots, n_l\}$$

ist die Menge

$$M \times N := \Big\{(m_i, n_j) \,\Big|\, i = 1, \cdots, k, j = 1, \cdots, l\Big\}$$

Sie besteht also aus allen möglichen Kombinationen, so dass

$$\begin{aligned} M \times N \quad = \quad & \Big\{(m_1, n_1), (m_1, n_2), (m_1, n_3), \cdots, (m_1, n_l), \\ & (m_2, n_1), (m_2, n_2), (m_2, n_3), \cdots, (m_2, n_l), \\ & \qquad \vdots \\ & (m_k, n_1), (m_k, n_2), (m_k, n_3), \cdots, (m_k, n_l)\Big\} \end{aligned}$$

Bsp. 5.8.

$$\begin{aligned} M &= \{1,2,3\} \\ N &= \{1,2,3,4\} \\ M \times N &= \end{aligned}$$

Achtung: Bei den Elementen von $M \times N$ handelt es sich um Tupel, das heißt die Reihenfolge ist wichtig! (z.B. $(1,2)$ ist etwas anderes als $(2,1)$.)

Verallgemeinerungen:

- Das kartesische Produkt der Mengen $M_1, M_2, \cdots, M_n$ wird mit

$$\bigtimes_{i=1}^{n} M_i = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$$

  bezeichnet und besteht aus allen möglichen n-Tupeln, die sich (unter Beachtung der Reihenfolge) aus Elementen aus $M_1, M_2, \cdots, M_n$ bilden lassen.

- Die Mengen $M_1, M_2, \cdots, M_n$ müssen nicht endlich sein; für endliche Mengen gilt

$$\left| \bigtimes_{i=1}^{n} M \right| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_n|$$

- Kartesische Produkte werden in der Statistik dazu verwendet, um Ergebnisse komplexer Experimente aus Einzelexperimenten zusammenzusetzen.