Theorie der statistischen Preisindizes

Institut für Statistik

Ludwig-Maximilians-Universität

Seminararbeit

erste, noch unvollständige Version

von

Lucas Klepp

10. Juni 2016

Betreuer: Herr Paul Fink, M. Sc

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Motivation

Ein zentrales Anliegen der Volkswirtschaftslehre besteht darin, die Preissteigerung bzw. Inflation in einem Land zu erfassen und diese als Indikator für die wirtschaftliche Situation in dem entsprechenden Land zu verwenden. Geeignete Methoden zur Messung von Preissteigerungen beruhen auf statistischen Verfahren aus dem Gebiet der statistischen Preisindextheorie. Gewöhnliche Preisindizes erfassen aktuelle Preise und verkaufte Mengen einer Vielzahl von Produkten und vergleichen diese Größen in der Regel mit denen im Vorjahr, um daraus Meßzahlen zu berechnen, die zur Beurteilung von Preissteigerungen geeignet sind. Doch welche Preisindizes sind hierfür besonders geeignet ? Welchen Axiomen müssen potentielle Indizes genügen ? Und wie verändern sich Preisindizes bei Preis - bzw. Mengensteigerungen oder analog bei Verminderung von Preisen und Mengen ? Und welcher Zusammenhang besteht zwischen potentiellen Preis - und Mengenindizes ? Diese Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: bevor das Augenmerk auf die statistische Preisindextheorie fällt, wird der ökonomische Ansatz der Preisindextheorie - beruhend auf Nutzenfunktionen - erläutert, da bestimmte Preisindizes auch durch Nutzenfunktionen, welche aus der Volkswirtschaftslehre bekannt sind, darstellbar sind. Daraufhin werden verschiedene Axiomensysteme für Preisindizes diskutiert, wichtige Preisindizes vorgestellt und diese auf die teils unterschiedlichen Axiomensysteme hin überprüft. Weiterhin werden Zusammenhänge zwischen den beiden wichtigsten Preisindizes in der Volkswirtschaft – dem Paasche - und dem Laspeyres - Preisindex – vorgestellt und an ausgewählten Beispielen illustiert. Abgeschlossen wird diese Arbeit mit einer aktuellen Darstellung der Situation bezogen auf die Inflationsmessung mit Preisindizes in der Bundesrepublik Deutschland und der EU. Ein Großteil der theoretischen Ausführungen dieser Arbeit stammen aus dem Buch „Axiom und Struktur in der statistischen Preisindextheorie“ von Bernhard Olt.

Kapitel 2

Ökonomischer Ansatz der Preisindextheorie

Neben der statistischen Preisindextheorie existiert die ökonomische Theorie der Preisindizes, in deren Mittelpunkt der Lebenshaltungskostenindex nach Konüs, welcher auf der Theorie der Nutzenfunktion basiert, steht. Zunächst wird der Begriff der Nutzenfunktion eingeführt und aufgezeigt, welchen Bedingungen diese genügen muss. Daraufhin wird der Lebenshaltunskostenindex nach Konüs eingeführt und ein Zusammenhang zu den beiden wichtigsten statistischen Preisindizes – dem Laspeyer - und dem Paascheindex – hergestellt.

2.1 Die Nutzenfunktion und optimales Konsumentenverhalten

Der Konsum von Gütern $\underline{q} = (q_1, ..., q_n)$ stiftet in der Nutzentheorie Nutzen, welcher ordinaler statt kardinaler Natur ist (und somit nicht messbar) und niemals negativ sein kann. (Hens, Pamini, 2008, S.10) Zudem ist es für einen Konsumenten unmöglich, eine negative Menge an Gütern zu konsumieren, was zu folgender, sinnvollen Definition einer Nutzenfunktion f führt: (Olt, 1995, S.14)

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R} \\ \underline{q} \to f(\underline{q}) = u \end{cases} \tag{2.1}$$

Die Nutzenfunktion muss zudem folgende Eigenschaften aufweisen: (Hens, Pamini, 2008, S.36)

1. Die Nutzenfunktion f ist stetig - differenzierbar
2. f ist monoton: empfindet ein Konsument eine Gütermenge $\underline{q}_1$ mindestens so gut wie eine Gütermenge $\underline{q}_2$, so gilt: $f(\underline{q}_1) \geq f(\underline{q}_2)$. Das Güterbündel, welches durch den Konsumenten

als mindestens so gut empfunden wird wie ein anderes Güterbündel, stiftet also auch mindestens genau so viel Nutzen wie das andere Güterpaar

3. f ist monoton wachsend

4. f ist quasikonkav, d.h., $\forall \underline{q}_1, \underline{q}_2 \in \mathbb{R}^n_+$ mit $f(\underline{q}_2) \geq f(\underline{q}_1))$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt: $f(\lambda \cdot \underline{q}_2 + (1-\lambda) \cdot \underline{q}_1 \geq f(\underline{q}_1)$

Dem Konsumenten wird im Folgenden rationales Konsumverhalten unterstellt, d.h., er versucht bei gegebenem Budget sein Nutzen zu maximieren, was völlig analog dazu bedeutet, dass er bei gegebenem Nutzenniveau versucht, die Kosten für Güter zu minimieren. (Engelkamp, Sell, 2007, S.46)

2.2 Der Lebenshaltungskostenindex nach Konüs

Der Lebenshaltungskostenindex nach Könus (auch ökonomischer Preisindex genannt) beruht auf dem Prinzip einer Nutzenfunktion. Zu einer vorgegebenem Nutzenfunktion f und einem zu realisierenden Nutzenniveau u^* soll der Konsument zu gegebenen Preisen $\underline{p}^0, \underline{p}^t$ Mengen $\underline{q}^0, \underline{q}^t$ so konsumieren, dass die Kosten hierfür minimal werden. (von der Lippe, 2015, S.2) Der Index t steht hierbei für die Zeit: der Lebenshaltungskostenindex vergleicht also die minimalen Kosten zur Aufrechthaltung eines festen Referenz - Nutzenniveaus u^* – bzw. das mit den Referenzquantitäten $\underline{q}^*$ assozierte Nutzenniveau $f(\underline{q}^*)$ – zum jetzigen Zeitpunkt mit den entsprechenden minimalen Kosten zum Zeitpunkt t. Mathematisch ausgedrückt erhält man schließlich folgende Formel mit $t = 1$ für den ökonomischen Preisindex: (Olt, 1995, S.15)

$$L_K(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^*) = \frac{C(f(\underline{q}^*), \underline{p}^1)}{C(f(\underline{q}^*), \underline{p}^0)} \tag{2.2}$$

wobei

$$C(f(\underline{q}^*), \underline{p}^t) = \min_{\underline{q} \geq 0} \{\underline{q} \cdot \underline{p}^t \mid f(\underline{q} \geq f(\underline{q}^*)\}, \; t \in \{0, 1\} \tag{2.3}$$

dem Minimum der Ausgabenfunktion in Abhängigkeit der Referenzquantitäten $\underline{q}^*$ entspricht. Die Abhängigkeit des Lebenshaltungskostenindex von einem vorgegebenem Nutzenniveau u^* stellt einen entscheidenden Unterschied zwischen ökonomischer und statistischer Preisindextheorie dar: während in der statistischen Preisindextheorie die Indizes in der Regel von Preisen und Mengen abhängig sind, sind die Quantitäten der Güter in der ökonomischen Indextheorie selbst abhängig von einem vorgegebenem Nutzenniveau. (von der Lippe, 2015, S.2) Der Konüs - Index ist sowohl nach unten, als auch nach oben durch folgenden Ausdruck beschränkt: (Olt, 1995, S.15)

$$\min_{i=1,...,n} \left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right) \leq L_K(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^*) \leq \max_{i=1,...,n} \left(\frac{p_i^1}{p_i^0}\right) \tag{2.4}$$

Der Ausdruck links und rechts von Gleichung (2.4) wird als Preismeßzahl bezeichnet und stellt die Preisänderung eines Gutes i zwischen zwei Zeitpunkten dar. So lässt sich der ökonomische Index zwar eingrenzen, jedoch kann das Intervall zwischen niedrigster und größter Preismeßzahl unter Umständen enorm groß werden, weshalb diese Abschätzung nicht optimal ist. Durch eine Zusatzbedingung an die Nutzenfunktion f kann der Konüs - Index weiter eingeschränkt werden.

2.3 Paasche - und Laspeyres - Index als Grenzen des Lebenshaltungskostenindex

Einige Nutzenfunktionen weisen eine besondere Eigenschaft auf: sie sind homothetisch. Eine Nutzenfunktion f wird homothetisch genannt, wenn für $\lambda > 0$ folgendes gilt: (Hens, Pamini, 2008, S.44)

$$f(\lambda \cdot \underline{q}) = \lambda \cdot f(\underline{q}) \tag{2.5}$$

Genügt eine Nutzenfunktion f dieser Bedingung, so wird der Konüs - Index bei Anwendung dieser Nutzenfunktion durch den Paasche - Index nach unten und durch den Laspeyres - Index nach oben beschränkt, sodass

$$P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) \leq L_K(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^*) \leq P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0) \tag{2.6}$$

gilt, wobei der Paasche - Index durch

$$P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot p_i^1}{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot p_i^0} = \frac{\underline{q}^1 \cdot \underline{p}^1}{\underline{q}^1 \cdot \underline{p}^0} \tag{2.7}$$

und der Laspeyres - Index durch

$$P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i^0 \cdot p_i^1}{\sum_{i=1}^n q_i^0 \cdot p_i^0} = \frac{\underline{q}^0 \cdot \underline{p}^1}{\underline{q}^0 \cdot \underline{p}^0} \tag{2.8}$$

mit $\underline{p} = (p_1, ..., p_n)^T$ gegeben sind. (Olt, 1995, S.16)
Folgendes Beispiel soll diese Beziehung aufzeigen. Gegeben ist zunächst eine Tabelle mit Preis - und Mengenangaben zweier Güter zu Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$:

Gut	Preise	Mengen
1	$p_1^0 = 16, p_1^1 = 4$	$\mathrm{q}_1^0 = 1, q_1^1 = 16$
2	$p_2^0 = 4, p_2^1 = 16$	$\mathrm{q}_2^0 = 16, q_2^1 = 1$

Tabelle 2.1: Werte zur Berechnung der Indizes

Wie bereits in Kapitel 2.2 erwähnt sind die Quantitäten selbst von einem Nutzenniveau $\underline{q}^*$ abhängig, lediglich die Preise sind fest. In diesem Beispiel wird die Nutzenfunktion $f(q_1, q_2) = \sqrt{q_1 \cdot q_2}$ unterstellt. Diese Nutzenfunktion ist offensichtlich homothetisch, denn es gilt:

$$f(\lambda \cdot (q_1, q_2)) = \sqrt{(\lambda \cdot q_1) \cdot (\lambda \cdot q_2)} = \sqrt{\lambda^2 \cdot q_1 \cdot q_2} = \lambda \cdot \sqrt{q_1 \cdot q_2} = \lambda \cdot f(q_1, q_2)$$

Die Wurzelfunktion erfüllt zudem die nötigen Eigenschaften einer Nutzenfunktion: sie ist stetig - differenzierbar, monoton wachsend und quasi - konkav. (auf einen Beweis wird verzichtet) In diesem Beispiel wird ein Nutzenniveau von $u^* = 4$ vorgegeben. Hier erhält man die in Tabelle 2.1 angegebenen Quantitäten zum Basiszeitpunkt $t = 0$. Diese Quantitätenkombination ist kostenminimal in Hinblick auf das vorgegebene Nutzenniveau u^* und man erhält

$$C(f(\underline{q}^*), \underline{p}^0) = q_1^0 \cdot p_1^0 + q_2^0 \cdot p_2^0 = 1 \cdot 16 + 16 \cdot 4 = 80$$

In der Regel sind diese Quantitäten über ein Optimierungsproblem zu bestimmen, in diesem einfachen Beispiel sind die Quantitäten jedoch direkt einsehbar. Das Nutzenniveau $u^* = 4$ wird exakt eingehalten, denn es ist $f(1, 16) = \sqrt{1 \cdot 16} = 4$. Völlig analog erhält man den selben Wert für die minimalen Kosten für den Zeitpunkt $t = 1$. Somit erhält man folgende Werte für den ökonomischen Index sowie für den Paasche - und Laspeyres - Preisindex:

- $L_K(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^*) = \frac{1}{1} = 1$
- $P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) = \frac{16 \cdot 4 + 1 \cdot 16}{16 \cdot 16 + 1 \cdot 4} = \frac{80}{260} = 0,31$
- $P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0) = \frac{1 \cdot 4 + 16 \cdot 16}{1 \cdot 16 + 16 \cdot 4} = \frac{260}{80} = 3,25$

Offensichtlich gilt $P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) < L_K(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^*) < P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0)$. Obwohl diese Beschränkung des Konüs - Index aufgrund der viel zu geringen Anzahl an Gütern nicht aussagekräftig ist, ist diese jedoch schon im 2 - Güter - Fall besser als die Beschränkung in Gleichung (2.4), welche folgende Unter - und Obergrenze liefert:

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} < L_K(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^*) = 1 < \frac{16}{4} = 4$$

Der ökonomische Index zeigt keine Preissteigerung an, was in diesem Fall auch absolut gerechtfertigt ist, denn Gut 1 wird im gleichen Maße günstiger wie Gut 2 teurer wird. Der Paasche - Index zeigt einen deutlichen Preisrückgang an, wohingegen der Laspeyres - Index eine deutliche Preissteigerung anzeigt. Dass der Paasche - Index die Preissteigerung tendenziell unterschätzt

und der Laspeyres - Index die Inflation tendenziell überschätzt ist kein Zufall und wird in Kapitel 4 thematisiert.
Bei der Berechnung der minimalen Kosten zu den Zeitpunkten $t \in \{0, 1\}$ wurde die vermeintliche Abhängigkeit vom vorgegebenen Nutzenniveau u^* unterstellt. Tatsächlich ist es aber so, dass die Kostenfunktion bei Anwendung einer homothetischen Nutzenfunktion unabhängig von u^* ist. (Olt, 1995, S.15) λ fungiert hierbei als Skalierungsfaktor. Somit hängt C lediglich noch von den Güterpreisen zu den beiden Zeitpunkten ab und man erhält für den Konüs - Index:

$$L_K(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^*) = \frac{C(\underline{p}^1)}{C(\underline{p}^0)} \tag{2.9}$$

Im praktischen Fall bedeutet dies: der ökonomische Index bleibt unverändert, wenn man das Nutzenniveau u^* ändert. Diese Eigenschaft gilt jedoch niemals für nicht - homothetische Nutzenfunktionen.
Eine kurze Zusammenfassung schließt dieses Kapitel ab.

2.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Lebenshaltungskostenindex nach Konüs eingeführt und ein Zusammenhang zu den beiden wichtigsten statistischen Preisindizes – dem Laspeyres - und dem Paascheindex – hergestellt. Diese beiden Indizes stellen im Falle einer homothetischen Nutzenfunktion eine obere und untere Schranke für den ökonomischen Index dar. In dem konkreten Zahlenbeispiel in diesem Kapitel konnte man erkennen, dass der Paasche - Index den Preisanstieg tendenziell unterschätzt und der Laspeyres - Index die Inflation tendenziell überschätzt. Doch welche weiteren statistischen Preisindizes existieren noch ? Und welchen Axiomen und grundlegenden Annahmen müssen statistische Preisindizes genügen ? Mit diesen Fragen setzen sich die folgenden beiden Kapitel auseinander.

Kapitel 3

Axiomensysteme für statistische Preisindizes

In Kapitel 2 wurde stillschweigend vorausgesetzt, dass eine Mengen - und Preisänderung eines Gutes ohne weitere Überlegung in die Berechnung von Indizes einfließen können. In der Realität ist diese Annahme äußerst kritisch, weshalb es unbedingt erforderlich ist, die Güter auf einige grundlegende, praktische bzw. volkswirtschaftliche Eigenschaften hin zu überprüfen, was nachfolgend geschieht. Anschließend werden wichtige theoretische Axiomensysteme vorgestellt und analysiert. In den folgenden Ausführungen wird ein Basiszeitpunkt (bzw. Basisperiode) $t = 0$ und ein Vergleichszeitpunkt (bzw. Vergleichsperiode) $t = 1$ angenommen, sodass stets $t \in \{0, 1\}$ gilt.

3.1 Grundlegende Probleme bei der Berechnung von Preisindizes

Eine grundlegende Voraussetzung an ein Gut i ist, dass sowohl Preis - als auch Mengenangaben zu zwei Beobachtungszeitpunkten (z.B. $t \in \{0, 1\}$) bekannt sind, dass also vollständige Information über das Gut i vorliegt. (Olt, 1995, S.4) In der Praxis ist es jedoch häufiger so, dass Preis - oder Mengenangaben eines Gutes zu einem Beobachtungszeitpunkt nicht existieren, da in einer modernen Volkswirtschaft bestimmte Güter entweder durch andere Produkte eines Unternehmens ersetzt werden oder neue, „bessere “Güter das „alte “Gut ablösen. Die Insolvenz eines Unternehmens kann ebenfalls zu dieser Problematik führen. Ein Lösungsvorschlag von Hicks (Olt, 1995, S.5) sieht im Falle einer fehlenden Preis - Mengenangabe eines Gutes i zum Zeitpunkt $t = 1$ vor, dass der Preis von Gut i in $t = 1$ so hoch angesetzt wird, dass kein Mensch dieses Gut mehr kaufen würde, was eine Menge von $q_i = 0$ in $t = 1$ zur Folge hätte. Diese Methode würde allerdings die Berechnung der Preisindizes verfälschen, weshalb Marshall (Olt, 1995, S.6) die wohl offensichtlichste Methode vorschlägt: fehlen Angaben eines Gutes i zu

einem Zeitpunkt $t \in \{0, 1\}$, so wird es aus dem Warenkorb zur Berechnung eines Indizes gestrichen. Ein weiteres, viel häufiger anzutreffendes Problem bei Gütern stellt die Veränderung der Qualität der Güter zwischen zwei Zeitpunkten (bzw. Zeiträumen) dar. Wird beispielsweise das Herstellungsverfahren für Kraftfahrzeuge in dem Sinne verbessert, dass die eingesetzten Materialien nun langlebiger sind als zuvor, so führt eine Nichtberücksichtigung dieser Verbesserung zu einer Überschätzung des Preisanstiegs. (Olt, 1995, S.6) Völlig analog führt eine Nichtberücksichtigung einer Qualitätsverschlechterung eines Gutes zu einer Unterschätzung der Inflation. Ist eine Qualitätsverbesserung (bzw. - verschlechterung) eines Gutes so gravierend, dass die Preissteigerung (bzw. der Preisabfall) extrem über - oder unterschätzt wird, so wird dieses Gut ebenfalls aus dem Warenkorb zur Berechnung von Indizes gelöscht.
In der statistischen Preisindextheorie ist es eine absolute Grundvoraussetzung, dass über sämtliche Güter alle Preis - und Mengeninformationen vollständig vorliegen und die Beobachtungspunkte bzw. Beobachtungszeiträume $t \in \{0, 1\}$ für jedes Gut (nahezu) identisch sind. Sind diese grundlegenden Bedingungen erfüllt, so ist es sinnvoll, Axiomensysteme für Preisindizes zu betrachten.

3.2 Wichtige Axiomensysteme

Im folgenden Abschnitt werden drei wichtige Axiomensysteme vorgestellt, welchen statistische Preisindizes genügen müssen. Diese Systeme überschneiden sich zwar teilweise stark in ihrer Axiomatik, jedoch existieren Preisindizes, die einige Systeme erfüllen und andere Systeme nicht erfüllen. Zunächst werden die wichtigsten Axiomensysteme vorgestellt. Anschließend wird versucht, eine Hirarchie bezüglich der Strenge der Systeme herzustellen. Da in der Literatur oft unterschiedliche Bezeichnungen für ein gleiches System existieren, werden die folgenden Systeme lediglich mit Buchstaben benannt. Zudem werden Zusatzaxiome an die eigentlichen Kernaxiome in der Literatur gelegentlich als „Test “bezeichnet. Um eine irrtürmliche Zusammenhangsvermutung mit dem Begriff „Test “aus der Statistik zu verhindern, wird einheitlich der Begriff des Axioms bzw. Zusatzaxioms verwendet.

3.2.1 Axiomensystem A

Zunächst muss definiert werden, was ein Preisindex im mathematischen Sinne überhaupt darstellt. Ein statistischer Preisindex ist eine Abbildung $P : \mathbb{R}_+^{4n} \to \mathbb{R}_+$, d.h., der Wert eines statistischen Preisindex ist stets positiv, da alle Inputfaktoren stets positiv sind.
(TU Dortmund, https://www.statistik.tu-dortmund.de, 10.5.2016) Axiomemsystem A fordert insgesamt vier Axiome, welche für einen statistischen Preisindex erfüllt sein müssen: (Olt, 1995, S.26)

- Axiom 1 (Dimensionalität): $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$ gilt:

$$P(\lambda \underline{p}^0, \lambda \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1)$$

. Das bedeutet, dass eine Änderung der Währung keinen Einfluss auf den Preisindex hat

- Axiom 2 (Kommensurabilität): $\forall \underline{\underline{A}}$ (positive Diagonalmatrix der Größe $n \times n$) gilt:

$$P(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{p}^0, \underline{\underline{A}} \cdot \underline{p}^1, \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{q}^0, \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{q}^1) = P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1)$$

. Das bedeutet, dass gleiche Preisänderungen zum Basiszeitpunkt und Vergleichszeitpunkt keinen Einfluss auf den Preisindex haben, sofern diese von entsprechenden Mengenänderungen neutralisiert werden. Die Einträge auf der Hauptdiagonalen einer positiven Diagonalmatrix sind positiv, alle anderen Einträge dieser Matrix haben den Wert null.

- Axiom 3 (Strenge Mittelwerteigenschaft) Der Preisindex P lässt sich auf folgende Weise als Kombination der größten und kleinsten Preismeßzahl darstellen: für ein $\lambda \in (0, 1)$ gilt:

$$P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = \lambda \cdot \min_{i=1,\ldots,n} \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right) + (1 - \lambda) \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right)$$

- Axiom 4 (Symmetrie): Für eine Permutationsmatrix $\underline{\underline{B}}$ der Größe $n \times n$ gilt:

$$P(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{p}^0, \underline{\underline{B}} \cdot \underline{p}^1, \underline{\underline{B}} \cdot \underline{q}^0, \underline{\underline{B}} \cdot \underline{q}^1) = P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1)$$

Der Preisindex bleibt somit von einer Permutation der Güter unberührt. Jede Zeile und jede Spalte einer Permutationsmatrix enthält genau eine eins, die restlichen Einträge dieser Matrix sind null. Als einfachstes Beispiel einer Permutationsmatrix ist die Einheitsmatrix zu nennen.

Axiom 1 ist intuitiv greifbar, denn durch eine Währungsumstellung (z.B. DM auf Euro) sollte ein Preisindex nicht berührt werden. Axiom 3 beschränkt einen Preisindex nach oben durch die größte Preismeßzahl und nach unten durch die kleinste Preismeßzahl. (analog zu Gleichung (2.4) aus Kapitel 2) Das letzte Axiom sagt aus, dass es egal ist, in welcher Reihenfolge die Produkte aus Preisen und Mengen der jeweiligen Güter aufsummiert werden, da der Wert des Preisindex dadurch nicht verändert wird. Diese Axiome in diesem System sind unabhängig voneinander, das bedeutet, dass alle anderen Axiome nicht ausfallen, sofern ein Index ein Axiom nicht erfüllt. (Olt, 1995, S.29)

3.2.2 Axiomensystem B

Ein weiteres Axiomensystem – nachfolgend Axiomensystem B genannt – scheint zunächst sowohl auf die strenge Mittelwerteigenschaft, als auch auf die Eigenschaft der Symmetrie. In diesem System fungieren also die minimalen und maximalen Preismeßzahlen zunächst nicht als untere und obere Schranke. Stattdessen werden diese Axiome durch drei Axiome ersetzt: (Axiom 1 und Axiom 2 sind auch in diesem System enthalten) (von der Lippe, 1993, S.377)

- Axiom 5 (Monotonie): ein statistischer Preisindex reagiert auf Veränderungen der Preise (sowohl im Vergleichszeitraum, als auch im Basiszeitraum) logisch, d.h. es gilt:

  $$\underline{\tilde{p}}^1 \geq \underline{p}^1 \to P(\underline{p}^0, \underline{\tilde{p}}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) > P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1)$$

  und

  $$\underline{\tilde{p}}^0 \geq \underline{p}^0 \to P(\underline{\tilde{p}}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) < P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1)$$

  Diese beiden Gleichungen sind folgendermaßen zu interpretieren: ein Vektor $\underline{\tilde{p}}$ ist mindestens genauso „groß "wie ein Vektor $\underline{p}$, wenn mindestens ein Preis in $\underline{\tilde{p}}$ höher ist als in $\underline{p}$ und gleichzeitig kein Preis in $\underline{p}$ größer ist als in $\underline{\tilde{p}}$.

- Axiom 6 (Lineare Homogenität): werden alle Preise im Vergleichszeitraum (also der gesamte Preisvektor) mit einem gemeinsamen Skalar $\lambda \in \mathbb{R}_+$ multipliziert, so führt dies zu einer Vervielfachung des Preisindex mit diesem Skalar. Man erhält also:

  $$P(\underline{p}^0, \lambda \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = \lambda \cdot P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1)$$

- Axiom 7 (Identität): sind die Preisvektoren zum Basiszeitpunkt und zum Vergleichspunkt identisch, so nimmt der Preisindex den Wert 1 an:

  $$P(\underline{p}^0, \underline{p}^0, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = 1$$

Diese Axiome in diesem System sind ebenfalls unabhängig voneinander. Auf den ersten Blick scheinen sich System A und System B recht stark zu unterscheiden. Beide Systeme beinhalten logisch motivierte Axiome. Ein weiteres Axiomensystem C, welches im Folgenden beschrieben wird, stellt eine leichte Modifikation von System B dar.

3.2.3 Axiomensystem C

In diesem System werden die beiden Axiome 6 und 7 durch das Axiom der Proportionalität ersetzt (Axiom 8): verändern sich die Preise von der Basis - zur Vergleichsperiode um eine gemeinsame Konstante $\lambda > 0$, so nimmt der statistische Preisindex selbigen Wert an, d.h. es gilt: (TU Dortmund, https://www.statistik.tu-dortmund.de, 12.5.2016)

$$P(\underline{p}, \lambda\underline{p}, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = \lambda$$

Die Axiome 1, 2 und 5 (Dimensionalität, Kommensurabilität, Monotonie) bleiben auch in diesem System enthalten. Die Unabhängigkeit der Axiome ist auch in diesem System gewährleistet. Nun stellt sich die Frage, in wiefern man beurteilen kann, welches dieser Systeme strenger ist als das jeweils andere ? Der Begriff „Strenge “bedeutet hierbei, dass ein System X strenger ist als ein System Y, wenn Y eine echte Teilmenge von X ist. Um dies zu überprüfen, ist es notwendig, einen Zusammenhang zwischen den Axiomen herzustellen.

3.2.4 Zusammenhang zwischen den Axiomen und Ordnung der Axiomensysteme

Es besteht ein elementarer Zusammenhang zwischen Identität, Proportionalität, Monotonie, Strenger Mittelwerteigenschaft und Linearer Homogenität, welcher nachfolgend dargestellt wird: (Olt, 1995, S.34)

a) Lineare Homogenität und Identität $\Rightarrow$ Proportionalität
b) Proportionalität $\Rightarrow$ Identität
c) Monotonie und Proportionalität $\Rightarrow$ Strenge Mittelwerteigenschaft
d) Strenge Mittelwerteigenschaft $\Rightarrow$ Proportionalität

Die „Rückrichtungen “dieser Aussagen gelten jedoch im Allgemeinen nicht. Betrachtet man Zusammenhang b), so lässt sich sehr leicht erkennen, dass Axiomensystem B strenger ist als System C: beide Systeme erfüllen also das Prinzip der Identität, allerdings fehlt in C
Axiom 6, wohingegen B alle Axiome aus C enthält. Um ebenfalls eine Ordnung zu Axiomensystem A herstellen zu können, ist es hilfreich, das neue System A* zu betrachten, welches auf Axiom 4 (Symmetrie) verzichtet, da die Symmetrie weder in System B, noch in System C enthalten ist und somit ansonsten keine eindeutige Ordnung festgelegt werden kann. System C beinhaltet sowohl Monotonie, als auch Proportionalität. Diese beiden Axiome führen nach c) zur strengen Mittelwerteigenschaft, welche in A enthalten ist. Nach d) enthält System A als Implikation aus der strengen Mittelwerteigenschaft auch das Axiom der Proportionalität. Einzig Axiom 5 (Monotonie) ist in System A nicht enthalten. Somit lässt sich eine Ordnung bezüglich der Strenge der Axiomensysteme A*, B und C herstellen:

$$A^* \subset C \subset B$$

Neben den klassischen Axiomen existieren einige weitere, nützliche Zusatzaxiome, welche bestimmte Preisindizes erfüllen können. Auf diese Axiome wird nachfolgend kurz eingegangen.

3.2.5 Zusatzaxiome

Die Forderung nach Zusatzaxiomen ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn ein statistischer Preisindex mindestens dem System A* genügt. Zunächst wird das Zeitumkehraxiom erläutert.

Zeitumkehraxiom

Das Zeitumkehraxiom besagt, dass die Vertauschung von Basis - und Berichtspunkt den Kehrwert des Preisindex liefert, d.h. es gilt: (TU Dortmund, https://www.statistik.tu-dortmund.de, 12.5.2016)

$$P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = \frac{1}{P(\underline{p}^1, \underline{p}^0, \underline{q}^1, \underline{q}^0)} \Longleftrightarrow P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) \cdot P(\underline{p}^1, \underline{p}^0, \underline{q}^1, \underline{q}^0) = 1$$

Dieses Axiom wird von den meisten Preisindizes nicht erfüllt, wie man in Kapitel 4 sehen wird. Das folgende Axiom betrifft Preisindizes, die durch Verkettung gebildet werden.

Verkettungsaxiom

Dieses Axiom besagt, dass sich der Preisindex vom Basiszeitpunkt $t = 0$ zu einem Zeitpunkt $t = 2$ als Produkt der Preisindizes von $t = 0$ zu $t = 1$ sowie $t = 1$ und $t = 2$ darstellen lässt. (Olt, 1995, S.48) Für Preisindizes, die dieses Axiom erfüllen, gilt also:

$$P(\underline{p}^0, \underline{p}^2, \underline{q}^0, \underline{q}^2) = P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) \cdot P(\underline{p}^1, \underline{p}^2, \underline{q}^1, \underline{q}^2)$$

Das Verkettungsaxiom lässt sich prinzipiell auf beliebig große Zeitabstände anwenden und muss auch dann erfüllbar sein.
Gilt das Verkettungsaxiom, so folgt hieraus die Gültigkeit des Zeitumkehraxioms.
(TU Dortmund, https://www.statistik.tu-dortmund.de, 19.5.2016)

Product - Axiom

Multipliziert man einen statistischen Preisindex P mit einem Mengenindex Q, der nicht notwendigerweise aus dem Preisindex hervorgeht, so erhält man die Wertänderung eines Aggregats: (Olt, 1995, S.51)

$$P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) \cdot Q(\underline{q}^0, \underline{q}^1, \underline{p}^0, \underline{p}^1) = \frac{\underline{q}^1 \cdot \underline{p}^1}{\underline{q}^0 \cdot \underline{p}^0}$$

Um einen Mengenindex Q zu konstruieren ist es ledigilich erforderlich, die Preis - und Mengenvektoren in einer Preisindexformel zu vertauschen. Dieses Axiom ist insbesondere dann hilfreich, wenn man die Veränderung eines Aggregats bezüglich seinem Wert ermitteln möchte, da die

Berechnungsmethode in diesem Fall sehr einfach ist. Die Bedeutung eines Aggregats wird im nächsten Kapitel beschrieben.

3.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden zunächst grundlegende, praktische Probleme aus der Volkswirtschaft beschrieben, die bei Nichtbeachtung zur Verzerrung eines Preisindex beitragen können. Anschließend wurde die Theorie hinter Preisindizes – aufbauend auf Axiomensystemen – vorgestellt und diskutiert. Die drei wichtigsten Axiomensystemen lassen sich unter geringen Einschränkungen bezüglich der Axiome hinsichtlich ihrer Strenge ordnen. Dies ist allerdings nur möglich, wenn man einige wichtige Zusammenhänge zwischen den Axiomen zur Hilfe nimmt. Erfüllt ein Preisindex ein Axiomensystem, so kann dieser auf weitere Zusatzaxiome hin überprüft werden. Ein statistischer Preisindex sollte hierbei idealerweise möglichst viele Axiome und Zusatzaxiome erfüllen. Um dieses Kapitel nicht zu überladen, wurden nur die drei strengsten Axiomensysteme und einige wichtige Zusatzaxiome unter sehr vielen Zusatzaxiomen behandelt. Im folgenden Kapitel werden die wichtigsten statistischen Preisindizes vorgestellt und auf die drei vorgestellten Axiomensysteme hin überprüft.

Kapitel 4

Statistische Preisindizes

Bisher wurde zwar die Theorie hinter den Preisindizes beleuchtet, allerdings wurden konkrete, statistische Preisindizes, welche auch in der Praxis breite Anwendung finden, bisher nicht näher vorgestellt. Für Illustrationszwecke wird im Folgenden eine Ökonomie betrachtet, in der $n = 5$ Güter gehandelt werden und die dazugehörigen Preisvektoren

$$\underline{p}^0 = (2.20, 8.99, 1.35, 20.80, 130.27)^T \wedge \ \underline{p}^1 = (1.97, 10.11, 1.31, 18.26, 156.78)^T$$

sowie Mengenvektoren

$$\underline{q}^0 = (3700, 2180, 5876, 1325, 981) \wedge \ \underline{q}^1 = (3851, 1877, 5890, 1540, 703)$$

existieren. Für die Preismeßzahlen gilt $a_i = \frac{p_i^1}{p_i^0}$ und für die Mengenmeßzahlen gelte völlig analog $b_i = \frac{q_i^1}{q_i^0}$.

4.1 Der statistische Preisindex nach Paasche

Zunächst wird der Paasche - Index beleuchtet. Nach der Berechnung des Index wird darauf eingegangen, ob und welchen Axiomensystemen dieser genügt.

4.1.1 Berechnung

Der Paasche - Index ist durch folgenden Ausdruck – analog zu Kapitel 2 – gegeben durch

$$P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot p_i^1}{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot p_i^0} = \frac{\underline{q}^1 \cdot \underline{p}^1}{\underline{q}^1 \cdot \underline{p}^0}. \tag{4.1}$$

Alternativ kann der Paasche - Index auch in Abhängigkeit von den Preismeßzahlen a_i geschrieben werden und man erhält: (Kohn, 2004, S.174)

$$P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot \frac{p_i^1}{p_i^0} \cdot p_i^0}{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot p_i^0} = \frac{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot a_i \cdot p_i^0}{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot p_i^0} \tag{4.2}$$

Dieser Ausdruck ist formal identisch wie Formel (4.1), er liefert jedoch ein einleuchtendes Kriterium dafür, wann ein Preisindex und wann ein Mengenindex vorliegt. Lässt sich ein Index in Abhängigkeit von Preismeßzahlen schreiben, so liegt ein Preisindex vor, lässt sich ein Index jedoch in Abhängigkeit der Mengenmeßzahlen schreiben, so liegt ein Mengenindex vor. (auf weitere Unterschiede wird an dieser Stelle nicht eingegangen)
Zunächst wird der Wert des Paasche - Index mit Hilfe der obigen Vektoren berechnet und man erhält durch Anwendung von Formel (4.1):

$$P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) = \frac{(3851, 1877, 5890, 1540, 703) \cdot (1.97, 10.11, 1.31, 18.26, 156.78)^T}{(3851, 1877, 5890, 1540, 703) \cdot (2.20, 8.99, 1.35, 20.80, 130.27)^T} \approx 1,10$$

Der Paasche - Index zeigt also eine Verteuerung der Preise um circa 10% an. Dieser Index liefert eine Antwort auf die Frage, ob der Güterkorb der Vergleichsperiode unter Verwendung der Preise aus der Vergleichsperiode günstiger oder teurer ist als der selbe Güterkorb mit der exakt selben Gütermenge zu den Preisen der Basisperiode. (Kohn, 2004, S.174)
Ob und welchen Axiomen der Index nach Paasche genügt wird nun analysiert.

4.1.2 Der Paasche - Index und die Axiomensysteme

Der Paasche - Index erfüllt das gesamte Axiomensystem A. (Olt, 1995, S.29) Die Dimensionalität ist trivialerweise erfüllt, da der Faktor λ bei Überprüfung auf Dimensionalität gemäß Gleichung (4.1) sowohl im Zähler, als auch im Nenner existiert und somit wegfällt. Axiom 2 ist ebenfalls aufgrund ähnlicher Argumentationskette erfüllt. Das Symmetrieaxiom ist bei Betrachtung von Gleichung (4.1) trivialerweise erfüllt, da die Reihenfolge der Summation sowohl im Zähler, als auch im Nenner belanglos ist. Lediglich die Strenge Mittelwerteigenschaft muss überprüft werden. Für die kleinste bzw. größte Preismeßzahl erhält man mit obigen Zahlenbeispiel

$$\min_{i=1,\dots,5} \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right) = \frac{18,26}{20,8} = 0,88 \ \wedge \ \max_{i=1,\dots,5} \left(\frac{p_i^1}{p_i^0} \right) = \frac{156,78}{130,27} = 1,20.$$

Somit gilt gemäß der Formel in Axiom 3:

$$1,10 = \lambda \cdot 0,88 + (1 - \lambda) \cdot 1,20 \Leftrightarrow \lambda \approx 0,31$$

λ liegt somit im Bereich zwischen 0 und 1, also ist die strenge Mittelwerteigenschaft erfüllt. Da A^* eine Abschwächung von A ist, erfüllt der Paasche - Index auch dieses System.
Nun wird überprüft, ob der Preisindex nach Paasche auch das Axiomensystem B erfüllt. Die Monotonie ist erfüllt, denn erhöht man mindestens den Preis eines einzigen Gutes in der Vergleichsperiode, so erkennt man leicht durch Anwendung von Gleichung (4.1), dass der Zähler erhöht wird und somit auch der Preisindex steigt. (Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass sowohl die Gütermengen, als auch die Güterpreise stets positiv sind) Durch selbige Argumentation erkennt man sofort, dass der Preisindex fällt, sofern mindestens ein Gut in der Basisperiode im Preis steigt, da dies den Wert im Nenner erhöht und somit der Preisindex sinkt.
Ist Axiom 6 (Lineare Homogenität) auch erfüllt ? Durch Verwendung von Gleichung (4.1) und $\lambda > 0$ folgt:

$$P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot (\lambda p_i^1)}{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot p_i^0} = \frac{\lambda \cdot \sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot p_i^1}{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot p_i^0} = \lambda \cdot P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1)$$

Das Axiom der Linearen Homogenität ist durch den Paasche - Index also ebenfalls erfüllt. Das Identitätsaxiom erfüllt dieser Index ebenfalls, denn für $\underline{p}^0 = \underline{p}^1 = \underline{p}$ ist

$$P_P(\underline{p}, \underline{q}^1) = \frac{\underline{q}^1 \cdot \underline{p}}{\underline{q}^1 \cdot \underline{p}} = 1$$

erfüllt. Der Paasche - Index erfüllt infolgedessen das System B und auch das System C, da dieses eine echte Teilmenge von B darstellt. Genügt dieser Index auch den Zusatzaxiomen ?
Um das Verkettungsaxiom zu überprüfen, betrachte man die zwei trivialen Vektoren
$\underline{p}_2 = (1,1,1,1,1)^T$ sowie $\underline{q}_2 = (1,1,1,1,1)$ und wenden das Axiom an. Gleichung (4.1) liefert

$$P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^2, \underline{q}^2) = \frac{1}{2,20 + 8,99 + 1,35 + 20,80 + 130,27} = 0,0061$$

sowie

$$P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) \cdot P_P(\underline{p}^1, \underline{p}^2, \underline{q}^2) = 1,10 \cdot \frac{1}{1,97 + 10,11 + 1,31 + 18,26 + 156,78} = 0,0058$$

Offensichtlich sind diese beiden Ausdrücke nicht identisch, woraus folgt, dass das Verkettungsaxiom nicht erfüllt ist. Das Zeitumkehraxiom ist ebenfalls nicht erfüllt, dies folgt aus der direkten Beziehung zwischen Zeitumkehraxiom und Verkettungsaxiom. Zuletzt wird der Index nach Paasche auf das Product - Axiom überprüft. Hierfür wird der Mengenindex Q nach Paasche verwendet, der unmittelbar aus der Vertauschung von Preisen und Mengen hervorgeht:

$$P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) \cdot Q_P(\underline{q}^0, \underline{q}^1, \underline{p}^1) = \frac{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot p_i^1}{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot p_i^0} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n p_i^1 \cdot q_i^1}{\sum_{i=1}^n p_i^1 \cdot q_i^0} = \frac{(\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot p_i^1)^2}{\sum_{i=1}^n q_i^1 \cdot p_i^0 \cdot \sum_{i=1}^n p_i^1 \cdot q_i^0}$$

Um das Product - Axiom zu erfüllen, müsste dieser Ausdruck gleich dem Ausdruck

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^1 \cdot p_i^1}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \cdot p_i^0}$$

entsprechen. Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht der Fall, weshalb das Paar P_P und Q_P nicht geeignet ist, um dieses Axiom zu erfüllen. Dass der Paasche - Index dennoch das Product - Axiom erfüllt, wird in Kapitel 4.3.2 gezeigt.

4.2 Der statistische Preisindex nach Laspeyres

Nun wird der Laspeyres - Preisindex, welcher eng verwandt mit dem Paasche - Index ist, beschrieben. In Kapitel 2 wurde erwähnt, dass der Laspeyres - Index die Inflation tendenziell überschätzt. Anhand von den oben konstruierten Preis - und Mengenvektoren soll dies nun überprüft werden.

4.2.1 Berechnung

Der Laspeyres - Index lässt sich durch die Formel

$$P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \cdot p_i^1}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \cdot p_i^0} = \frac{\underline{q}^0 \cdot \underline{p}^1}{\underline{q}^0 \cdot \underline{p}^0}. \tag{4.3}$$

oder alternativ auch in Abhängigkeit der Preismeßzahlen a_i durch

$$P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \cdot \frac{p_i^1}{p_i^0} \cdot p_i^0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \cdot p_i^0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \cdot a_i \cdot p_i^0}{\sum_{i=1}^{n} q_i^0 \cdot p_i^0} \tag{4.4}$$

berechnen. Formel (4.3) liefert:

$$P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0) = \frac{(3700, 2180, 5876, 1325, 981) \cdot (1.97, 10.11, 1.31, 18.26, 156.78)^T}{(3700, 2180, 5876, 1325, 981) \cdot (2.20, 8.99, 1.35, 20.80, 130.27)^T} \approx 1,13$$

Der Laspeyres - Index zeigt also eine Inflation von 13% an, insgesamt also eine um 3% erhöhte Preissteigerung im Vergleich zum Index nach Paasche.
Der Laspeyres - Index gibt an, ob man im Vergleichszeitraum für den Güterkorb aus dem Basiszeitraum weniger, mehr oder ebenso viel zahlen muss wie im Basiszeitraum. (Kohn, 2004, S.170)
Nachfolgend wird der Index nach Laspeyres ebenfalls auf die Axiomensysteme hin überprüft.

4.2.2 Der Laspeyres - Index und die Axiomensysteme

Man könnte nun – analog zum Index nach Paasche – jedes Axiom der einzelnen Axiomensysteme nachweisen. Betrachtet man jedoch die Formeln (4.1) (Paasche) und (4.3) (Laspeyres), so erkennt man, dass der einzige Unterschied zwischen diesen beiden Indizes ist, dass der Paasche - Index den Warenkorb aus der Basisperiode zur Berechnung verwendet und der Laspeyres - Index den Güterkorb aus der Vergleichsperiode für die Berechnung heranzieht. Da die Axiomensysteme vorwiegend Bezug auf die Preisvektoren nimmt (und diese bei diesen Indizes identisch sind), kann man schlussfolgern, dass der Laspeyres - Index dieselben Axiomensysteme erfüllt wie der Index nach Paasche. Demzufolge erfüllt der Laspeyres - Index weder das Zeitumkehr - noch das Verkettungsaxiom.
Schon hier erkennt man die enge Bindung zwischen diesen beiden Indizes, welche nachfolgend noch weiter vertieft wird.

4.3 Zusammenhang zwischen Paasche - und Laspeyres - Index

Keine anderen statistischen Preisindizes weisen so einen engen Bezug zueinander auf wie der Laspeyres - und der Paasche - Index. Dies resultiert nicht nur aus den sehr ähnlichen Berechnungsmethoden, sondern auch aus einem mathematisch - statistischen Zusammenhang.

4.3.1 Mathematisch - statistischer Zusammenhang über die Korrelation

Es seien $(a_1, .., a_5)$ die Ausprägungen von A und $(b_1, .., b_5)$ die Ausprägungen von B, wobei a_i die Preismeßzahlen und b_i die Mengenmeßzahlen darstellen. Zusätzlich seien $\underline{g} = (g_1, .., g_5)$ die Ausgabenanteile zur Basiszeit, so dass

$$g_i = \frac{q_i^0 \cdot p_i^0}{\underline{q}^0 \cdot \underline{p}^0}$$

gilt. (von der Lippe, Buch 10, S.373) Hieraus folgt direkt: $\sum_{i=1}^{5} g_i = 1$. Mit Hilfe der gewogenen Mittelwerte $\bar{a}^*$ und $\bar{b}^*$, also

$$\bar{a}^* = \sum_{i=1}^{5} g_i \cdot a_i \;\wedge\; \bar{b}^* = \sum_{i=1}^{5} g_i \cdot b_i$$

sowie den entsprechenden gewogenen Varianzen

$$V^*(A) = \sum_{i=1}^{5} g_i \cdot (a_i - \bar{a}^*)^2 \ \wedge \ V^*(B) = \sum_{i=1}^{5} g_i \cdot (b_i - \bar{b}^*)^2$$

und der gewogenen Kovarianz

$$\text{Cov}^*(A, B) = \sum_{i=1}^{5} g_i \cdot (a_i - \bar{a}^*)(b_i - \bar{b}^*)$$

erhält man den gewogenen Korrelationskoeffizienten

$$r^*_{A,B} = \frac{\text{Cov}^*(A, B)}{\sqrt{V^*(A)} \cdot \sqrt{V^*(B)}}$$

zwischen A und B und letztendlich folgenden Zusammenhang zwischen Laspeyres - und Paasche - Index: (Olt, 1995, S.93)

$$P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) = r^*_{A,B} \cdot \frac{\sqrt{V^*(A)} \cdot \sqrt{V^*(B)}}{Q_L(\underline{q}^0, \underline{q}^1, \underline{p}^0)} + P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0) \tag{4.5}$$

Diese Darstellung ist in der Literatur zwar beliebt, allerdings erkennt man sofort eine einfachere Darstellung dieses Zusammenhangs:

$$P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) = \frac{\text{Cov}^*(A, B)}{Q_L(\underline{q}^0, \underline{q}^1, \underline{p}^0)} + P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0) \tag{4.6}$$

Mit Hilfe dieser beiden Formeln kann man das Verhalten des Paasche - und Laspeyres - Index besonders gut charakterisieren:

- Es ist $P_P = P_L$, wenn die Kovarianz $\text{Cov}^*(A, B)$ gleich null ist (woraus folgt, dass auch die Korrelation $r^*_{A,B}$ gleich null ist)

- Es ist $P_P = P_L$, wenn die Preismeßzahlen oder die Mengenmeßzahlen keine Streuung aufweisen (oder beides)

- Es ist $P_P > P_L$, sofern die Kovarianz von A und B positiv

- Es gilt $P_P < P_L$, sofern die Kovarianz von A und B negativ ist

Formel (4.5) und Formel (4.6) können also vielfältig eingesetzt werden, um fehlende Größen zu berechnen. Nimmt man nun an, dass $P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0) = 1,13$ nach obiger Berechnung gegeben ist, so erhält man mit Formel (4.6) und $\text{Cov}^*(A, B) = -0,021$ sowie $Q_L(\underline{q}^0, \underline{q}^1, \underline{p}^0) = 0,82$:

$$P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) = \frac{-0,021}{0,82} + 1,13 = 1,104 \approx 1,10$$

Dieses Ergebnis deckt sich (bis auf Rundungsfehler) mit dem oben berechnetem Index nach Paasche. Es stellt sich jedoch die Frage, weshalb die Kovarianz (und damit auch die Korrelation) negativ ist ? Das Zahlenbeispiel in dieser Arbeit wurde hierfür zwar bewusst so gewählt, jedoch ist ein negativer Zusammenhang zwischen Preis - und Mengenmeßzahlen absolut logisch: steigt der Preis eines Gutes an (Preismeßzahl steigt), so reagiert ein Haushalt nach dem Prinzip der rationalen Substitution und reduziert die Menge des Gutes (d.h. die Mengenmeßzahl sinkt), was eine negative Korrelation von Preis - und Mengenmeßzahlen zur Folge hat. (von der Lippe, 1993, S.374) In diesem Fall ist der Laspeyres - Index größer als der Pasche - Index. Ist eine kurzfristige Substitution jedoch nicht möglich (z.B. bei Mieten, Versicherungen), so kann es durchaus auch vorkommen, dass der Paasche - Index einen höheren Wert annimmt als der Laspeyres - Index.
Nachfolgend wird der Zusammenhang von Paasche - und Laspeyres - Index bezüglich des Product - Axioms sowie des Wertindex aufgezeigt.

4.3.2 Product - Axiom und Wertindex

Sowohl der Paasche - , als auch der Laspeyres - Index erfüllen das Product - Axiom unter Heranziehung der entsprechenden Mengenindizes im Allgemeinen nicht, allerdings gilt für das Product - Axiom der Zusammenhang: (Auer, Rottmann, 2015, S.129)

$$\frac{\underline{q}^1 \cdot \underline{p}^1}{\underline{q}^0 \cdot \underline{p}^0} = W(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) \cdot Q_L(\underline{q}^0, \underline{q}^1, \underline{p}^0) = Q_P(\underline{q}^0, \underline{q}^1, \underline{p}^1) \cdot P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0) \quad (4.7)$$

W wird als Wertindex (bzw. Umsatzindex) bezeichnet und und stellt die Veränderung des Warenkorbwerts zwischen Basis - und Vergleichsperiode dar und ist eine reine Meßzahl und kein „echter “Index im eigentlichen Sinne. (Auer, Rottmann, 2015, S.129) Der Laspeyres- und der Paasche - Index erfüllen also das Product - Axiom bei Anwendung der entsprechenden Mengenindizes. Aus Gleichung (4.7) folgt, dass die Division aus Laspeyres - und Paasche - Preisindex gleich der Division von Laspeyres - und Paasche - Mengenindex ist:

$$\frac{P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0)}{P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1)} = \frac{Q_L(\underline{q}^0, \underline{q}^1, \underline{p}^0)}{Q_P(\underline{q}^0, \underline{q}^1, \underline{p}^1)} \quad (4.8)$$

Ist also der Laspeyres - Preisindex höher als der Paasche - Preisindex, so ist auch der entsprechende Mengenindex höher. Weiterhin folgt aus Gleichung (4.6)

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}^*(A, B) &= Q_L(\underline{q}^0, \underline{q}^1, \underline{p}^0) \cdot (P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) - P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0)) \quad (4.9) \\ &\overset{(4.7)}{=} W(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) - Q_L(\underline{q}^0, \underline{q}^1, \underline{p}^0) \cdot P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0) \end{aligned}$$

und somit insgesamt:

$$W(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = Q_L(\underline{q}^0, \underline{q}^1, \underline{p}^0) \cdot P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0) + \text{Cov}^*(A, B) \tag{4.10}$$

Der Laspeyres - Index (und somit auch der Paasche - Index) erfüllen das Product - Axiom mit ihren dazugehörigen Mengenindizes also nur, wenn die Kovarianz (und somit die Korrelation) zwischen Preis - und Mengenmeßzahlen den Wert 0 hat.
Durch Anwendung von Formel (4.7) erhält man für den Wertindex:

$$W(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = 1,10 \cdot 0,82 \approx 0,90$$

Der Wert des Warenkorbs ist also um circa 10% gesunken.
Nun werden die Vor - und Nachteile der Indizes nach Laspeyres und Paasche aufgezeigt.

4.3.3 Vor - und Nachteile der Indizes

Ein wesentlicher Vorteil des Laspeyres - Preisindex liegt darin, dass er recht einfach und ohne allzu großen Aufwand zu berechnen ist, da lediglich die Preismeßzahlen ausgetauscht werden müssen und das Wägungsschema gleich bleibt. (von der Lippe, 1993, S.372) Allerdings liegt genau hier auch der entscheidende Nachteil dieses Index: er weist üblicherweise einen zu hohen Preisanstieg auf, da bei der Gewichtung mit dem Warenkorb der Basisperiode ignoriert wird, dass bei Preissteigerungen die Haushalte in der Regel den Konsum reduzieren. (Kohn, 2004, S.171) Aus diesem Grund muss der Warenkorb regelmäßig aktualisiert werden, um noch zuverlässige Aussagen über die Inflation bzw. Deflation treffen zu können. Dieses Problem tritt bei Anwendung des Paasche - Preisindex nicht auf, jedoch müssen bei der Berechnung des Preisanstiegs immer die aktuell verkauften Mengen der Produkte erfasst werden, was sich in der Praxis als extrem aufwendig erweist. Aufeinanderfolgende Werte des Paasche - Index unterscheiden sich nicht nur in den Preisen, sondern auch in den Mengen, weshalb sie untereinander – anders als beim Index nach Laspeyres – nicht vergleichbar sind.
Es existieren noch weitere Preisindizes, welche zum Teil aus den Indizes nach Paasche und Laspeyres konstruiert sind.

4.4 Weitere Preisindizes

Neben den beiden extrem nützlichen Indizes nach Paasche und Laspeyres existieren unzählige weitere Preisindizes, von denen nachfolgend einige wichtige Indizes behandelt werden.

4.4.1 Der Preisindex nach Drobisch

Der Preisindex nach Drobisch ist das arithmetische Mittel aus Paasche - und Laspeyres - Preisindex: (von der Lippe, 2003, S.13)

$$P_D(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = \frac{1}{2} \cdot (P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) + P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0)) \tag{4.11}$$

In obigem Beispiell würde man den Wert

$$P_D(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = \frac{1}{2} \cdot (1,10 + 1,13) \approx 1,115$$

erhalten, welcher logischerweise zwischen den Indizes nach Paasche und Laspeyres liegen muss. Dieser Index zeigt eine Inflation von $11,5\%$ an.

Der Index nach Drobisch erfüllt ebenso wie der Laspeyres - und Paasche - Index alle Axiomensysteme und darüberhinaus das Product - Axiom, wenn man als Mengenindex das harmonische Mittel aus Paasche - und Laspeyres - Index wählt. (Olt, 1995, S.69) das Zeitumkehr - und das Verkettungsaxiom erfüllt dieser Index jedoch ebenso wenig wie die Indizes nach Paasche und Laspeyres. Der Index nach Drobisch kann also dafür verwendet werden, die Über - und Unterschätzung durch Paasche und Laspeyres auszugleichen.

4.4.2 Preisindex nach Fisher als idealer Index

Der Preisindex nach Fischer gilt in der statistischen Preisindextheorie als idealer Index. (Kohn, 2004, S.179) Dieser Index erfüllt nicht nur sämtliche Axiomensysteme, sondern auch das Product - Axiom und das Zeitumkehr - Axiom. Der Fisher - Index ist wird als das geometrische Mittel aus Paasche - und Laspeyres - Index berechnet: (Kohn, 2004, S.180)

$$P_F(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = \sqrt{P_P(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^1) \cdot P_L(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0)} \tag{4.12}$$

Beispielhaft wird nun das Zeitumkehraxiom nachgewiesen:

$$P_F(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) \cdot P_F(\underline{p}^1, \underline{p}^0, \underline{q}^1, \underline{q}^0) = \sqrt{\frac{\underline{q}^0 \cdot \underline{p}^1}{\underline{q}^0 \cdot \underline{p}^0} \cdot \frac{\underline{q}^1 \cdot \underline{p}^1}{\underline{q}^1 \cdot \underline{p}^0}} \cdot \sqrt{\frac{\underline{q}^1 \cdot \underline{p}^0}{\underline{q}^1 \cdot \underline{p}^1} \cdot \frac{\underline{q}^0 \cdot \underline{p}^0}{\underline{q}^0 \cdot \underline{p}^1}} = 1$$

Da der Fisher - Index alle Axiomensysteme und zusätzlich das Zeitumkehr - Axiom sowie das Product - Axiom erfüllt, wird er als ideal bezeichnet. Dieser Index ist der einzige Index, der das Product - Axiom durch Anwendung des eigenen Mengenindex erfüllt, d.h. es gilt:

$$W(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = P_F(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) \cdot Q_F(\underline{q}^0, \underline{q}^1, \underline{p}^0, \underline{p}^1)$$

In der Literatur wird fälschlicherweise oft behauptet, dass der Fisher - Index ideal ist, weil er zusätzlich das Verkettungsaxiom erfüllt. Dies ist jedoch ein fataler Irrtum. Durch Rechnung kann man leicht zeigen, dass selbst der Index nach Fisher dieses Axiom nicht erfüllt, denn nach Olt (1995, S.46) können nur Preisindizes das Verkettungsaxiom erfüllen, wenn sie von den Quantitäten der Güter völlig unabhängig sind, d.h. es werden keine Mengenangaben in die Berechnung des Preisindex mit aufgenommen. Der Fisher - Index berechnet die Inflationsrate sehr genau, allerdings ist die Berechnung aufgrund des Paasche - Index recht komplex in der Praxis.
Dieser Index liefert eine Inflationsrate von

$$P_F(\underline{p}^0, \underline{p}^1, \underline{q}^0, \underline{q}^1) = \sqrt{1,10 \cdot 1,13} \approx 1,115$$

Der Index nach Fisher liefert in diesem Beispiel ungefähr den selben Wert wie der Index nach Drobisch.
Nachfolgend wird noch ein weiterer Preisindex behandelt, der gänzlich ohne Quantitäten auskommt.

4.4.3 Preisindex nach Carli

Der Preisindex nach Carli ist das arithmetische Mittel der Preismeßzahlen und wird durch

$$P_C(\underline{p}^0, \underline{p}^1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^1}{p_i^0} \tag{4.13}$$

berechnet. (von der Lippe, 1993, S.360) Der Carli - Index erfüllt ebenfalls alle Axiomensysteme, wie man leicht nachrechnet. Allerdings ignoriert dieser Index sämtliche Quantitäten und kann somit nicht das Product - Axiom erfüllen. (Olt, 1995, S.67) Der Carli - Index erfüllt das Zeitumkehraxiom nur für den Fall $n = 1$ und verletzt somit auch das Verkettungsaxiom.
Die recht einfache Berechnungsmethode ist ein Vorteil dieses Index, allerdings stellt sich die Frage, ob es legitim ist, die Quantitäten als Gewichte zu ignorieren. Dies ist im Allgemeinen problematisch, weshalb dieser Index auch in der Praxis kaum Anwendung findet. Im Zahlenbeispiel erhält man den Wert

$$P_C(\underline{p}^0, \underline{p}^1) = \frac{1}{5} \cdot (0,895 + 1,125 + 0,97 + 0,878 + 1,204) \approx 1,014$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit den anderen Ergebnissen – insbesondere mit dem Idealindex nach Fisher – so erkennt man, dass dieser Index die Inflation aufgrund der fehlenden Quantitäten nicht befriedigend einschätzt.

4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden verschiedene Preisindizes vorgestellt. Das Hauptaugenmerk lag hierbei auf dem Laspeyres - und Paasche - Index, da diese Indizes sämtliche Axiomensysteme erfüllen und somit dafür geeignet sind, die Inflation bzw. die Deflation zu messen. Zudem wurde ein elementarer Zusammenhang zwischen diesen beiden Indizes hergestellt, welcher über die Korrelation bzw. Kovarianz der Preis - und Mengenmeßzahlen führt. Hierbei erkannte man, dass der Index nach Laspeyres die Inflation tendenziell überschätzt und der Index nach Paasche die Inflation eher unterschätzt. Um dieses Problem zu beheben wurde der Fisher - Index herangezogen, welcher aus dem geometrischen Mittel der beiden Indizes konstruiert ist und somit zwischen dem Paasche - und Laspeyres - Index liegt (oder umgekehrt). Diese beiden Indizes erfüllen als Paar jeweils das Product - Axiom, somit können sie zur Ermittlung der Wert - bzw. Umsatzveränderung in einer Ökonomie herangezogen werden, was eine wünschenswerte Eigenschaft für einen Preisindex darstellt. Der Index nach Fisher ist der einzige Index, der dieses Axiom unter Verwendung des eigenen Mengenindex erfüllt und zudem noch das Zeitumkehraxiom erfüllt. Das Verkettungsaxiom können lediglich Preisindizes erfüllen, welche zur Berechnung vollständig auf die Hinzunahme von Mengenangaben verzichten. Somit könnte höchstens der Index nach Carli dieses Axiom erfüllen, was jedoch nur für den in der Praxis sinnlosen Fall $n = 1$ tatsächlich funktioniert. Zudem schätzt dieser Index die Inflation nicht zuverlässig ein und ist somit für die Praxis eher ungeeignet.

Literaturverzeichnis

[1] Olt, Bernhard: Axiom und Struktur in der statistischen Preisindextheorie, 1.Auflage, 1995, Verlag Peter Lang

[2] von der Lippe, Peter Michael: Deskriptive Statistik, 1. Auflage, Gustav Fischer Verlag, 1993

[3] Hens, Thorsten / Pamini, Paolo: Grundzüge der analytischen Mikroökonomie, 1. Auflage, 2008, Springer Verlag

[4] Engelkamp, Paul / Sell, Friedrich: Einführung in die Volkswirtschaftslehre, 4. Auflage, 2007, Springer Verlag

[5] Kohn, Wolfgang: Statistik - Datenanalyse und Wahrscheinlichkeistrechnung

[6] Auer, Benjamin / Rottmann, Horst: Statistik und Ökonometrie für Wirtschaftswissenschaftler

[7] Institut für Statistik der Technischen Universität Dortmund, Skript aus dem Wintersemester 15/16, `https://www.statistik.tu-dortmund.de/fileadmin/user_upload/Lehrstuehle/IWuS/Lehre/Statistik_I_2013_2014/Axiomatik.pdf`

[8] von der Lippe, Peter Michael: Einführung in die ökonomische Theorie der Indexzahlen und den True Cost of Living Index (COLI), Artikel, 2015, `http://www.von-der-lippe.org/dokumente/COLI-HP.pdf`

[9] von der Lippe, Peter Michael: Indexzahlen, Artikel, 2003, `http://www.von-der-lippe.org/dokumente/indexzahlen.pdf`