2.2.2 Gütekriterien

Beurteile die Schätzfunktionen, also das Verfahren $an\ sich$, nicht den einzelnen Schätzwert. Besonders bei komplexeren Schätzproblemen sind klar festgelegte Güteeigenschaften wichtig.

Natürlich ist auch zu Beginn genau festzulegen, was geschätzt werden soll. Im Folgenden sei der Parameter ϑ stets eine eindimensionale Kenngröße der Grundgesamtheit (z.B. Mittelwert, Varianz, Maximum)

Der Punkt ist, dass T zufällig ist; der Wert schwankt mit der konkreten Stichprobe.

- Man kann also nicht erwarten, dass man immer den richtigen Wert trifft.

- Die Beurteilung der Güte des Schätzers bezieht sich auf Kenngrößen seiner Verteilung (v.a. Erwartungswert und Varianz)

Definition 2.3. *(Erwartungstreue, Bias)*

Gegeben sei eine Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ und eine Schätzfunktion $T = g(X_1, \ldots, X_n)$ (mit existierendem Erwartungswert).

- T heißt $erwartungstreu\ für\ den\ Parameter$ ϑ, falls gilt

  $$\mathrm{E}_\vartheta(T) = \vartheta$$

  für alle ϑ.

- Die Größe

  $$\mathrm{Bias}_\vartheta(T) = \mathrm{E}_\vartheta(T) - \vartheta$$

  heißt $Bias$ (oder $Verzerrung$) der Schätzfunktion.

Man schreibt $\mathrm{E}_\vartheta(T)$ und $\mathrm{Bias}_\vartheta(T)$, um deutlich zu machen, dass die Größen von dem wahren ϑ abhängen. Erwartungstreue Schätzfunktionen haben per Definition einen Bias von 0.

Anschauliche Interpretation:

Bsp. 2.4. [Fortsetzung des Beispiels]

Nehmen Sie an, die Stichprobenziehung sei gemäß einer reinen Zufallsauswahl erfolgt, d.h. jede Stichprobe hat dieselbe Wahrscheinlichkeit gezogen zu werden (hier dann $\frac{1}{6}$). Sind die oben betrachteten Schätzfunktionen T_1, T_2, T_3 erwartungstreu?

Zur Beurteilung: Alle möglichen Stichproben (vom Umfang $n = 2$, ohne Zurücklegen) betrachten:

Nummer der Stichprobe	Personen in der Stichprobe	Realisationen von X_1	X_2	T_1	T_2	T_3
1	$\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$	3	1	2	3	2
2	$\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_3$	3	2	2.5	3	2
3	$\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_1$	1	3	2	1	2
4	$\tilde{\omega}_2$, $\tilde{\omega}_3$	1	2	1.5	1	$1.\bar{3}$
5	$\tilde{\omega}_3$, $\tilde{\omega}_1$	2	3	2.5	2	2
6	$\tilde{\omega}_3$, $\tilde{\omega}_2$	2	1	1.5	2	$1.\bar{3}$

Verteilung von T_1, T_2, T_3 siehe bei Erwartungstreue

Für die Träger $\mathcal{T}_i$ von $T_i,\ i = 1, 2, 3$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \{1.5, 2, 2.5\} \\ \mathcal{T}_2 &= \{1, 2, 3\} \\ \mathcal{T}_3 &= \{1.\bar{3}, 2\} \end{aligned}$$

Bei T_1 gilt: $P(\{T_1 = 1.5\}) = P(\{T_1 = 2\}) = P(\{T_1 = 2.5\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Bei T_2 gilt: $P(\{T_2 = 1\}) = P(\{T_2 = 2\}) = P(\{T_2 = 3\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Bei T_3 gilt: $P(\{T_3 = 1.5\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(\{T_3 = 3\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

und damit bei $\vartheta = \mu = 2$:

- $\mathbb{E}_2(T_1) = \sum_{t_1 \in \mathcal{T}_1} t_1 \cdot P(\{T_1 = t_1\}) = \frac{1}{3}(1.5 + 2 + 2.5) = 2.$

  In der Tat gilt allgemein (vgl. die nächste Bemerkung): Das arithmetische Mittel ist erwartungstreu für den Erwartungswert.

$$\mathbb{E}_2(T_2) = \sum_{t_2 \in \mathcal{T}_2} t_2 \cdot P(\{T_2 = t_2\}) = \frac{1}{3}(1 + 2 + 3) = 2$$

  Wieder gilt allgemein: Einzelne Stichprobenvariablen ergeben auch erwartungstreue Schätzer für den Erwartungswert, sind aber weniger geeignet (s.u.).

$$\mathbb{E}_2(T_3) = \sum_{t_3 \in \mathcal{T}_3} t_3 \cdot P(\{T_3 = t_3\}) = \frac{1}{3} \cdot 1.\bar{3} + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{16}{9} \neq 2$$

  T_3 ist also nicht erwartungstreu. Es gilt

$$\text{Bias}(T_3) = \mathbb{E}_2(T_3) - 2 = \frac{16}{9} - \frac{18}{9} = -\frac{2}{9}$$

Bem. 2.5. [Bias und Erwartungstreue bei einigen typischen Schätzfunktionen]

- Das arithmetische Mittel $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ist erwartungstreu für den Mittelwert μ einer Grundgesamtheit: Aus $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. und $\mathrm{E}_\mu(X_1) = \mathrm{E}_\mu(X_2) = \ldots = \mu$ folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\bar{X}) &= \mathrm{E}_\mu\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\,\mathrm{E}_\mu\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \mu = \mu
\end{aligned}
$$

- Sei σ^2 die Varianz in der Grundgesamtheit. Es gilt

$$\mathrm{E}_{\sigma^2}(\tilde{S}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2,$$

also ist $\tilde{S}^2$ *nicht* erwartungstreu für σ^2.

$$\mathrm{Bias}_{\sigma^2}(\tilde{S}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{1}{n}\sigma^2$$

(Für $n \to \infty$ geht $\mathrm{Bias}_{\sigma^2}(\tilde{S}^2)$ gegen 0, $\tilde{S}^2$ ist „*asymptotisch erwartungstreu*“.)

- Für die korrigierte Stichprobenvarianz gilt dagegen:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_{\sigma^2}(S^2) &= \mathrm{E}_{\sigma^2}\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right) \\ &= \mathrm{E}_{\sigma^2}\left(\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right) \\ &= \mathrm{E}_{\sigma^2}\left(\frac{n}{n-1}S^2\right) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}\sigma^2 = \sigma^2 \end{aligned}$$

  Also ist S^2 erwartungstreu für σ^2. Diese Eigenschaft ist auch die Motivation dafür, von einer Korrektur der Stichprobenvarianz zu sprechen.

- *Vorsicht:* Im Allgemeinen gilt, wie in Kapitel 1.5.3 ausgeführt, für beliebige, nichtlineare Funktionen g

$$\mathrm{E}\, g(X) \neq g(\mathrm{E}(X)).$$

  Man kann also nicht einfach z.B. $\sqrt{\cdot}$ und E vertauschen. In der Tat gilt: S^2 ist zwar erwartungstreu für σ^2, aber $\sqrt{S^2}$ ist nicht erwartungstreu für $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$.

Bsp. 2.6. [Wahlumfrage]

Gegeben sei eine Stichprobe der wahlberechtigten Bundesbürger. Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer des Anteils der rot-grün Wähler an.

Bedeutung der Erwartungstreue: Erwartungstreue ist in gewisser Weise ein schwaches Kriterium, denn es gibt viele unsinnige erwartungstreue Schätzer!

Deshalb betrachtet man zusätzlich die Effizienz eines Schätzers, s.u.