1.7 Grenzwertsätze und Approximationen

Gerade in der empirischen Sozialforschungarbeitet man häufig mit $großen$ Stichprobenumfängen.

- Was ist aus der Sicht der Wahrscheinlichkeitsrechnung das Besondere daran?
- Vereinfacht sich etwas und wenn ja was?
- Kann man „Wahrscheinlichkeitsgesetzmäßigkeiten“ durch Betrachten vielfacher Wiederholungen erkennen?

1.7.1 Das i.i.d.-Modell

Betrachtet werden diskrete oder stetige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, die $i.i.d.$ (independently, identically distributed) sind, d.h. die

1) unabhängig sind und
2) die gleiche Verteilung besitzen.

Ferner sollen der Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 existieren. Die Verteilungsfunktion werde mit F bezeichnet.

Dies bildet insbesondere die Situation ab, in der $X_1, \ldots, X_n$ eine Stichprobe eines Merkmals X bei reiner Zufallsauswahl bilden.

Jede Funktion von $X_1, \ldots, X_n$ ist wieder eine Zufallsvariable, z.B. das arithmetische Mittel oder die Stichprobenvarianz

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Vor dem Ziehen der Stichprobe: Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich $\Longrightarrow$ Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden

- Gerade bei diesen Zufallsgrößen ist die Abhängigkeit von n oft wichtig, man schreibt dann $\bar{X}_n$, $\tilde{S}_n^2$
- Sind $X_1, \ldots, X_n$ jeweils $\{0, 1\}$-Variablen, so ist $\bar{X}_n$ gerade die empirische *relative Häufigkeit* von Einsen in der Stichprobe vom Umfang n. Notation: H_n

später:
Induktionsschluss

Durchführen eines Zufallsexperiments // Ziehen einer Stichprobe

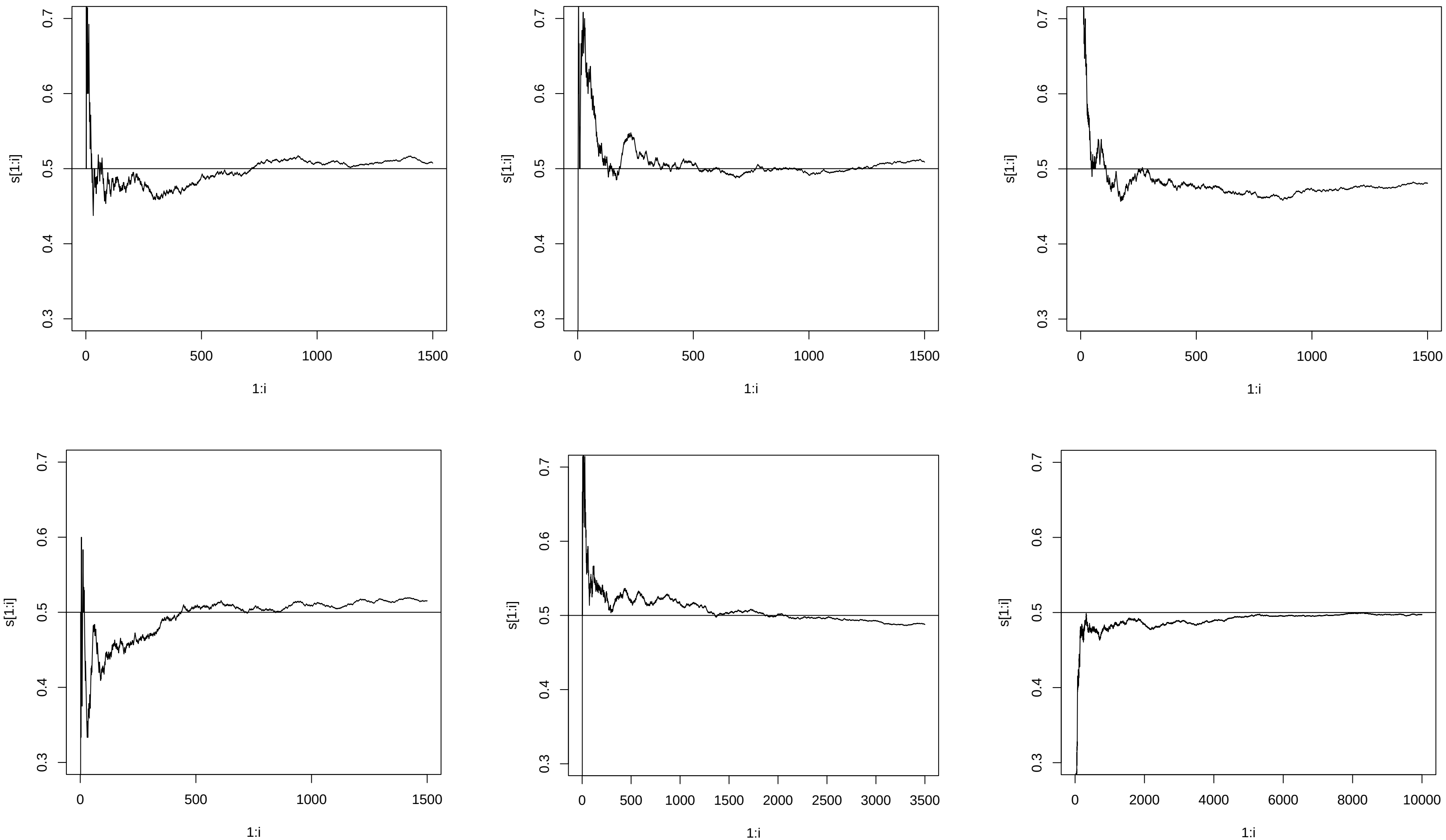
IMMER „Wahrheit “	$\xrightarrow{S-planung}$	VORHER		NACHHER
Wahre Urliste $\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_N}$ eines Merkmals		Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ (z.B. X_i Einkommen der i-ten Person)	$\xrightarrow{Wsktsrechn.}$	Realisationen $\underbrace{x_1, \ldots, x_n}$ neue Urliste $\Downarrow$ Auswertung, z.B.
$\bar{\bar{x}}$ arithmetisches Mittel in der Grundgesamtheit		arithmetisches Mittel der Stichprobe $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$	$\xleftrightarrow{S-ziehung}$	arithmetisches Mittel der Stichprobe $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
$\widetilde{s^2_{\widetilde{X}}}$ Varianz in der Grundgesamtheit		Stichprobenvarianz $\widetilde{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$	$\longleftrightarrow$	empirische Varianz[3] $\tilde{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
$F(x)$ empirische Verteilungsfunktion in der Grundgesamtheit		empirische Verteilungsfunktion als Zufallsvariable in jedem Punkt x $F_n^{x_1,\ldots,x_n}(x) = \frac{1}{n} \lvert\{i : X_i \leq x\}\rvert$	$\longleftrightarrow$	empirische Verteilungsfunktion $F_n^{x_1,\ldots,x_n}(x) = \frac{1}{n} \lvert\{i : x_i \leq x\}\rvert$

[3]Gehört nicht zur Grundgesamtheit; hier „$\sim$“ für empirische Version

1.7.2 Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Betrachte für wachsenden Stichprobenumfang n:

- $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d.
- $X_i \in \{0, 1\}$ binäre Variablen mit $\pi = P(X_i = 1)$
- $H_n =$ die relative Häufigkeit der Einsen in den ersten n Versuchen.


s[1:i]
1:i
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4000
6000
8000
10000

Was fällt auf?

Theorem 1.84. [Theorem von Bernoulli]

Seien $X_1, \ldots, X_n$, i.i.d. mit $X_i \in \{0, 1\}$ und $P(X_i = 1) = \pi$. Dann gilt für

$$H_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

(relative Häufigkeit der „Einsen") und beliebig kleines $\epsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P(|H_n - \pi| \leq \epsilon) = 1.$$

Anschauliche Interpretation: Die relative Häufigkeit eines Ereignisses nähert sich praktisch sicher mit wachsender Versuchszahl an die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses an.

Zwei wichtige Konsequenzen:

1) Häufigkeitsinterpretation von Wahrscheinlichkeiten:

2) Induktion: Man kann dieses Ergebnis nutzen, um Information über eine unbekannte Wahrscheinlichkeit ($\pi \mathrel{\hat{=}}$ Anteil in einer Grundgesamtheit) zu erhalten.

Das Ergebnis lässt sich verallgemeinern auf Mittelwerte beliebiger Zufallsvariablen:

Schwaches Gesetz der großen Zahl: Gegeben seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. Zufallsvariablen mit (existierendem) Erwartungswert μ und (existierender) Varianz σ^2. Dann gilt für

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

und beliebiges $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \leq \epsilon) = 1$$

Schreibweise:

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

(„Stochastische Konvergenz“, „X_n konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen μ“.)

Konsequenz für die Interpretation des Erwartungswerts:

1.7.3 Der Hauptsatz der Statistik

Satz 1.85. [Hauptsatz der Statistik]

Seien $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. mit Verteilungsfunktion F und sei $F_n(x)$ die empirische Verteilungsfunktion der ersten n Beobachtungen. Mit

$$D_n := \sup_x |F_n(x) - F(x)|,$$

gilt für jedes $c > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(D_n > c) = 0.$$

Interpretation: