1.5 Erwartungswert und Varianz

Ziel: Charakterisiere Verteilungen von Zufalls<u>variablen</u> (Bildbereich also reelle Zahlen, metrische Skala) durch Kenngrößen (in Analogie zu Lage- und Streuungsmaßen der deskriptiven Statistik). Insbesondere:

a) „durchschnittlicher Wert“ $\longrightarrow$ Erwartungswert, z.B.

- „mittleres“ Einkommen,
- „durchschnittliche“ Körpergröße,
- fairer Preis eines Spiels.

b) Streuung (Dispersion), z.B. wie stark schwankt das Einkommen, die Körpergröße etc.

1.5.1 Diskrete Zufallsvariablen

Definition 1.66.

Gegeben sei eine diskrete Zufallsvariable X mit Träger $\mathcal{X}$. Dann heißt

$$\mathrm{E}\,X := \mathrm{E}(X) := \sum_{x\in\mathcal{X}} x \cdot P(X = x)$$

Erwartungswert von X,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,X := \mathrm{Var}(X) := \mathbb{V}(X) \quad &:= \quad \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2)\\ &= \quad \sum_{x\in\mathcal{X}} (x - \mathrm{E}(X))^2 \cdot P(X = x)\end{aligned}$$

Varianz von X und

$$\sigma_X := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Standardabweichung von X.

Anmerkungen:

- Die Varianz gibt die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert an. Durch das Quadrieren werden Abweichungen nach unten (negative Werte) auch positiv gezählt.
- Damit Erwartungswert und Varianz sinnvoll interpretiert werden können, muss eine metrische Skala zugrundeliegen. Dies sei im Folgenden bei der Verwendung des Begriffs Zufalls*variable* (im Unterschied zu Zufalls*element*) stets implizit unterstellt.
- Allgemein bezeichnet man $\mathrm{E}(X^k)$ als *k-tes Moment*.
- Zur Berechnung der Varianz ist der sogenannte *Verschiebungssatz* sehr praktisch:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}\,X)^2 \tag{1.11}$$

Bsp. 1.67.

Sei X eine Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\begin{aligned} P(\{X=1\}) &= 0.4 \\ P(\{X=2\}) &= 0.3 \\ P(\{X=3\}) &= 0.2 \\ P(\{X=4\}) &= 0.1 \end{aligned}$$

Berechne Erwartungswert und Varianz von X !

Träger der Verteilung: $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4\}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} x \cdot P(X = x) \\
&= 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) + 4 \cdot P(X = 4) \\
&= 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 \\
&= 0.4 + 0.6 + 0.6 + 0.4 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Zur Berechnung der Varianz:

X	$(X - \mathbb{E}(X))$	$(X - \mathbb{E}(X))^2$	$P(X = x)$
1	-1	1	0.4
2	0	0	0.3
3	1	1	0.2
4	2	4	0.1

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} (X - \mathrm{E}(X))^2 \cdot P(X = x) \\
&= 1 \cdot 0.4 + 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.1 \\
&= 0.4 + 0 + 0.2 + 0.4 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Alternative Berechnung über den Verschiebungssatz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} x^2 \cdot P(X = x) \\
&= 1 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.2 + 4^2 \cdot 0.1 \\
&= 0.4 + 1.2 + 1.8 + 1.6 \\
&= 5
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}\, X)^2 = 5 - 2^2 = 1 \checkmark .$$

Bemerkungen zur Interpretation:

- Man kann zeigen ($\longrightarrow$ Gesetz der großen Zahl, vgl. Kap. 1.7): $\mathbb{E}(X)$ ist der durchschnittswertliche Wert, wenn das durch X beschriebene Zufallsexperiment unendlich oft unabhängig wiederholt wird (Häufigkeitsinterpretation).

- Eine andere Interpretation, die gerade im Kontext des subjektivistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff gängig ist, versteht $\mathrm{E}(X)$ als erwarteten Gewinn – und damit als fairen Einsatz – eines Spieles mit zufälliger Auszahlung X („Erwartungswert").

- Man kann auch wieder einen direkten Bezug zu den Momenten einer Grundgesamtheit herstellen. Auch hier greift also die induktive Brücke:
  Betrachtet man die Grundgesamtheit Ω, das Merkmal X und versteht X_i als Auswertung von X an der i-ten durch reine Zufallsauswahl gewonnenen Einheit ω_i dann gilt: Ist $x_1, x_2, \ldots, x_N$ die Urliste von X; $\mu := \bar{x}$ das arithmetische Mittel und $\sigma^2 := \tilde{s}_x^2$ die empirische Varianz, so ist für jedes i:

$$\mathrm{E}\, X_i = \mu \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2.$$

1.5.2 Stetige Zufallsvariablen

Definition 1.68.

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte $f(x)$. Dann heißt (sofern wohldefiniert)

$$\mathrm{E}\,X := \mathrm{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

Erwartungswert von X,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\,X := \mathrm{Var}(X) := \mathbb{V}(X) &:= \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}(X))^2 \cdot f(x)\, dx \end{aligned}$$

Varianz von X und

$$\sigma_X := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

Standardabweichung von X.

Anmerkungen:

- Der Verschiebungssatz zur Berechnung der Varianz gilt nach wie vor (vgl. 1.11).

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}\,X)^2$$

- Es gibt Verteilungen, bei denen der Erwartungswert und damit auch die Varianz nicht existiert (z.B. die sog. Cauchy-Verteilung)
- Die eben gegebenen Bemerkungen zur Interpretation behalten ihre Gültigkeit.

1.5.3 Allgemeine Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz

Satz 1.69.

Seien X und Y diskrete oder stetige Zufallsvariablen (mit existierenden Erwartungswerten und Varianzen). Dann gilt:

a) $\mathrm{E}(aX + bY) = a \cdot \mathrm{E}(X) + b \cdot \mathrm{E}(Y)$ und insbesondere auch

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(a) &= a, \\ \mathrm{E}(aX) &= a \cdot \mathrm{E}(X) \\ \mathrm{E}(X + Y) &= \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) \end{aligned}$$

b) $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \cdot \mathrm{Var}(X)$.

c) Sind X und Y zusätzlich unabhängig, so gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X \cdot Y) &= \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) \\ \mathrm{Var}(X + Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \end{aligned}$$

Bem. 1.70.

- Der Erwartungswert ist immer additiv aufspaltbar, die Varianz dagegen nur bei Unabhängigkeit!

- Die Additivität der Varianz unter Unabhängigkeit gilt nicht für die Standardabweichung σ:
$$\sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)} \neq \sqrt{\mathrm{Var}(X)} + \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$$

- Man beachte explizit, dass wegen b) gilt $\mathrm{Var}(-X) = \mathrm{Var}(X)$ und damit unter Unabhängigkeit
$$\mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

- Im Allgemeinen gilt:

$$\mathrm{E}(g(X)) \neq g(\mathrm{E}(X))$$

also z.B.

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) \neq \frac{1}{\mathrm{E}(X)}$$

und

$$\mathrm{E}(X^2) \neq (\mathrm{E}(X))^2.$$

Definition 1.71.

Die Zufallsvariable

$$Z := \frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$

heißt *standardisierte Zufallsvariable*. Es gilt

$$\mathrm{E}(Z) = 0 \text{ und } \mathrm{Var}(Z) = 1.$$

Bsp. 1.72. [Abschließendes Beispiel zu Erwartungswert und Varianz: Chuck-a-Luck]

- Beim Spiel Chuck-a-Luck werden drei Würfel geworfen. Der Spieler setzt vor dem Wurf auf eine der Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Zeigt keiner der Würfel die gesetzte Zahl, so ist der Einsatz verloren. Andernfalls erhält der Spieler (zusätzlich zu seinem Einsatz) für jeden Würfel, der die gesetzte Zahl zeigt, einen Betrag in Höhe des Einsatzes, hier als eine Einheit festgelegt.

- Wahrscheinlichkeitsfunktion des Gewinns nach einem Spiel, bei dem auf eine bestimmte Zahl (hier z.B. "6") gesetzt wurde:

G = Gewinn	Würfelkombinationen	Anzahl	Wahrscheinlichkeit
3	666	1	1/216
2	66a, 6a6, a66 mit a$\in\{1,2,3,4,5\}$	15	15/216
1	6ab, a6b, ab6, mit a,b$\in\{1,2,3,4,5\}$	75	75/216
-1	abc mit a,b,c$\in\{1,2,3,4,5\}$	125	125/216
Summe		216	1

Diese Rechnung gilt genauso für jede andere Zahl.

- Für den Erwartungswert erhält man

$$E(G) = 3 \cdot \frac{1}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} - 1 \cdot \frac{125}{216} = -\frac{17}{216} = -0.078$$

also einen erwarteten Verlust von 7.8% des Einsatzes.

- Betrachte die Zufallsvariablen:

$X_1, X_2, \ldots, X_6$	Gewinn, wenn beim ersten Wurf ein Einsatz auf $1, 2, \ldots, 6$ gesetzt wird.
$Y_1, Y_2, \ldots, Y_6$	Gewinn, wenn beim zweiten Wurf ein Einsatz auf $1, 2, \ldots, 6$ gesetzt wird.

- Mögliche Spielstrategien bei einem Kapitaleinsatz von zwei Einheiten und zugehörige Gewinne:

$2X_6$	Gewinn, wenn beim ersten Wurf ein zweifacher Einsatz auf 6 gesetzt wird (Strategie 1).
$X_1 + X_6$	Gewinn, wenn beim ersten Wurf jeweils ein Einsatz auf 1 und 6 gesetzt wird (Strategie 2).
$X_6 + Y_6$	Gewinn, wenn beim ersten und zweiten Wurf ein Einsatz auf 6 gesetzt wird (Strategie 3).

- Erwartungswerte: Aus $E(X_i) = E(Y_i) = -\frac{17}{216}$ folgt:

$$\begin{aligned} E(2X_6) &= 2E(X_6) = -\frac{34}{216} \\ E(X_1 + X_6) &= E(X_1) + E(X_6) = -\frac{34}{216} \\ E(X_6 + Y_6) &= E(X_6) + E(Y_6) = -\frac{34}{216}, \end{aligned}$$

d.h. bei den drei Strategien sind die Erwartungswerte alle gleich!

- Trotzdem gibt es deutliche Unterschiede in den drei Strategien:

Strategie	Wertebereich	$P(\{-2\})$
$2X_6$	-2,2,4,6	0.579
$X_1 + X_6$	-2,0,1,2,3	0.296
$X_6 + Y_6$	-2,0,1,2,3,4,5,6	0.335

- Varianz des Gewinns nach einem Spiel

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(G) &= \left(3+\frac{17}{216}\right)^2 \cdot \frac{1}{216} + \left(2+\frac{17}{216}\right)^2 \cdot \frac{15}{216} + \left(1+\frac{17}{216}\right)^2 \cdot \frac{75}{216} + \\
&\quad + \left(-1+\frac{17}{216}\right)^2 \cdot \frac{125}{216} \\
&= 0.04388156 + 0.30007008 + 0.40402836 + 0.4911961 = \\
&= 1.2391761 \\
\sqrt{\mathrm{Var}(G)} &= 1.113183
\end{aligned}
$$

- Nach den Rechenregeln für Varianzen erhält man für die Strategien 1 und 3:

$$\mathrm{Var}(2X_6) = 4\,\mathrm{Var}(X_6) = 4 \cdot 1.2391761 = 4.956704$$

und, wegen der Unabhängigkeit von X_6 und Y_6,

$$\mathrm{Var}(X_6 + Y_6) = \mathrm{Var}(X_6) + \mathrm{Var}(Y_6) = 1.2391761 + 1.2391761 = 2.4783522.$$

- Da X_1 und X_6 nicht unabhängig sind, muss hier die Varianz explizit berechnet (oder die später betrachteten Formeln für die Kovarianz verwendet) werden.

- Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X_1 + X_6$:

x	-2	0	1	2	3
$P(X_1 + X_6 = x)$	0.29630	0.44444	0.11111	0.12037	0.02778

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(X_1 + X_6) &= \left(-2 + \frac{34}{216}\right)^2 \cdot 0.29630 + \left(0 + \frac{34}{216}\right)^2 \cdot 0.44444 + \\
&\quad + \left(1 + \frac{34}{216}\right)^2 \cdot 0.11111 + \left(2 + \frac{34}{216}\right)^2 \cdot 0.12037 + \\
&\quad + \left(3 + \frac{34}{216}\right)^2 \cdot 0.02778 = \\
&= 2.003001
\end{aligned}
$$

- Fazit:

  * Strategie 1, also $2X_6$, ist am riskantesten, sie hat die höchste Varianz. Hohes Verlustrisiko, in der Tat ist $P(\{-2\})$ am größten, andererseits ist hier z.B. die Chance, 6 Einheiten zu gewinnen am grössten, denn es gilt

    bei Strategie 1:
    $P(2X_6 = 6) = P(X_6 = 3) = \frac{1}{216}$
    bei Strategie 2:
    $P(X_1 + X_6 = 6) = P(X_1 = 3 \cap X_6 = 3) = P(\emptyset) = 0$
    bei Strategie 3:
    $P(X_6 + Y_6 = 6) = P(X_6 = 3 \cap Y_6 = 3) = P(X_6 = 4) \cdot P(Y_6 = 3) = (\frac{1}{216})^2$

  * Am wenigsten riskant ist Strategie 2.

  * Typische Situation bei Portfolio Optimierung (außer, dass Erwartungswert < 0):