1.4.2 Verteilungsfunktion

Jetzt Zufallsvariablen betrachten, also reellwertige Realisationen.
Viele interessierende Ereignisse besitzen folgende Form:

$$\{X \leq a\} \quad \text{oder} \quad \{X \in [a, b]\} = \{a \leq X \leq b\},$$

wobei a und b feste reelle Zahlen sind.

$P(\{X \leq a\})$ für variables a entspricht der empirischen Verteilungsfunktion. In der Tat definiert man:

Definition 1.51.

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Die Funktion

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\to [0;1] \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

$$F(x) := P(X \leq x)$$

heißt *Verteilungsfunktion* von x.

Bsp. 1.52. [Fortsetzung von Bsp. 1.48]

Berechne die Verteilungsfunktion und zeichne sie.

Satz 1.53.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer (diskreten) Zufallsvariablen X kann man durch die Verteilungsfunktion eineindeutig erklären.

Die Wahrscheinlichkeit anderer Ereignisse ergibt sich aus dem dritten Kolmogorovschen Axiom. Es gilt zum Beispiel

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Die Ereignisse $\{X \leq a\} = \{\omega | X(\omega) \leq a\}$, $\{a < X \leq b\}$ und $\{X > b\}$ sind disjunkt und ergeben in ihrer Vereinigung Ω. Also gilt

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b) + P(X > b) \\ \Leftrightarrow &\quad 1 - P(X \leq a) - P(X > b) = P(a < X \leq b) \\ \Leftrightarrow &\quad P(X \leq b) - P(X \leq a) = P(a < X \leq b) \end{aligned}$$

Allgemein gilt: $F(x)$ ist eine stückweise konstante Treppenfunktion und $P(X = x)$ ist genau die Sprunghöhe der Verteilungsfunktion im Punkt x.

Bsp. 1.54. [Fortsetzung von Bsp. 1.52]

Berechne: $P(2.5 < X \leq 3.5)$

$P(1 < X \leq 3)$

$P(1 \leq X \leq 3)$

Zusammenfassend:

Zufallsvariable $\Omega \to \Omega_X$: Verteilung von X beschrieben durch P_x, Wahrscheinlichkeitsfunktionen, Verteilungsfunktion $F(x) = P_X(\{X \leq x\}) = \sum_{\substack{w \in \mathcal{X} \\ w \leq x}} f(w)$