1.3.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit:

- A Ereignis, das mit Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eintritt.
  Zusatzinformation: Ereignis B ist eingetreten.
- Frage: Wie ist nun die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A neu zu bewerten? Welche Wahrscheinlichkeit hat A „gegeben“ B?
- Notation: $P(A \mid B)$.
- Wie in Statistik I: Bedingen als Einschränkung der Betrachtung, hier auf alle Situationen, bei denen B eingetreten ist

Einmaliges Würfeln mit fairem Würfel

- zur ersten Annäherung betrachtet man einen fairen Würfel, sodass man mit dem Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriff arbeiten kann

- Ereignis $A \hat{=}$ Augenzahl 6, d.h. $A = \{6\}$. Es gilt $P(A) = \frac{1}{6}$.

- Zusatzinformation: Augenzahl gerade
  Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit für A, wenn $B = \{2, 4, 6\}$ eingetreten ist?

Formalisierung: Über Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsbegriff hinaus

Definition 1.28.

Gegeben seien zwei Ereignisse A und B mit $P(B) > 0$. Dann heißt:

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B oder *bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.*

In der Praxis ist meist folgende Informationsinterpretation statthaft: $P(A|B)$ ist die Wahrscheinlichkeit von A wenn feststeht, dass B gilt.

Bsp. 1.29.

Bem. 1.30.

- Die Beziehung zu Statistik I und den bedingten relativen Häufigkeiten ergibt sich, wenn man wieder die durch A und B erzeugte $(2 \times 2)-$Tafel betrachtet.

$$P(B) \hat{=} f_{\bullet 1}, \quad P(A \cap B) \hat{=} f_{11}$$

	1	2	
1	f_{11}	f_{12}	$f_{1\bullet}$
2	f_{21}	f_{22}	$f_{2\bullet}$
	$f_{\bullet 1}$	$f_{\bullet 2}$	

- Es ergibt sich auch eine analoge Charakterisierung der stochastischen Unabhängigkeit über bedingte Wahrscheinlichkeiten:

  Sind $P(A)$ und $P(B) > 0$, so sind äquivalent:

  i) A und B sind stochastisch unabhängig

- Dies führt zu folgender inhaltlicher Interpretation:

  Ist $P(A|B) = P(A)$, so ändert das Wissen um das Eintreten von B meine Bewertung von A nicht, also sind A und B unabhängig.

  Nachweis zu ii)

- Die ursprüngliche Definition der Unabhängigkeit besitzt den Vorteil, dass man nicht $P(A) = 0$, $P(B) = 0$ ausschließen muss; für die Interpretation ist aber die Bezugnahme auf bedingte Wahrscheinlichkeiten meist viel anschaulicher.

- Interpretation von „unter der Bedingung B“:

  Anstatt aller Ergebnisse in Ω sind nur noch die Ergebnisse in B möglich. Das Betrachten bedingter Wahrscheinlichkeiten entspricht also einer Änderung des Grundraumes von Ω zu B.

  In der Tat ist

  $$P_B(A) := P(A|B) = P(A \cap B|B) \tag{1.7}$$

  als Funktion in A bei festem B wieder eine Wahrscheinlichkeitsbewertung, erfüllt also wieder die Axiome von Kolmogorov.

1.3.3 Koppelung von unabhängigen Experimenten, unabhängige Wiederholungen

Mit dem Begriff der Unabhängigkeit (und bedingten Wahrscheinlichkeiten) kann man komplexere Situationen aus „Einzelbausteinen“ zusammensetzen:

- Bisher: Unabhängigkeit als zu überprüfende Eigenschaft

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) \quad \Longrightarrow \text{ unabhängig.}$$

- Jetzt: Unabhängige Experimente „koppeln“
- Beispiel: Werfen eines Würfels ($\Omega_1 = \{1, \ldots, 6\}$) und eines Oktaeders ($\Omega_2 = \{1, \ldots, 8\}$) unabhängig voneinander.

$A_1 \subset \Omega_1 : A_1 = \{5, 6\}$,

$A_2 \subset \Omega_2 : A_2 = \{7, 8\}$,

$A_1 \cap A_2$: „eine 5 oder 6 mit dem Würfel und eine 7 oder 8 mit dem Oktaeder“

Dann definiert man

$$P(A_1 \cap A_2)\ [:= P(A_1 \times A_2) =]\ := P_1(A_1) \cdot P_2(A_2);$$

also erhält man bei einem fairem Würfel und einem fairem Oktaeder mit

$$P_1(\{j\}) = \frac{1}{6}, i = 1, \ldots, 6, \qquad \text{und} \qquad P_2(\{j\}) = \frac{1}{8}, i = 1, \ldots, 8,$$

$$P(A_1 \cap A_2) \quad = \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Diese Konstruktion führt man für alle möglichen $A_1 \subset \Omega_1,\ A_2 \subset \Omega_2$ durch.

Bem. 1.31. *Unabhängige Koppelung mehrerer Experimente:*

Gegeben sei eine Menge von Zufallsexperimenten, beschrieben durch die Ergebnisräume Ω_i, $i = 1, \ldots, n$, und die Wahrscheinlichkeitsbewertungen P_i, $i = 1, \ldots, n$. Fasst man die Experimente zusammen, so ergibt sich der Ergebnisraum

$$\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n$$

mit den Elementen

$$\omega := (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\,.$$

Sind die Experimente unabhängig (Dies ist inhaltlich zu entscheiden!), so setzt man für beliebige $A_i \subset \Omega_i, i = 1, \ldots, n$,

$$P\,(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2) \cdot \ldots \cdot P_n(A_n).$$

Dies beschreibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω, bei dem – per Konstruktion – beliebige Ereignisse aus den einzelnen Ω_i voneinander unabhängig sind.
Man beachte, dass durch die Setzung

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) := P\left(\bigtimes_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(A_i\right), \text{ für alle } A_1, \cdots, A_n$$

gemeinsame Unabhängigkeit erzeugt wird: Für $\emptyset \neq I \subseteq \{1, \cdots, n\}$ gilt dann:

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = P\left(\bigtimes_{i \in I} A_i \times \bigtimes_{i \notin I} \Omega_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i) \cdot \prod_{i \notin I} \underbrace{P(\Omega_i)}_{1} = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Von besonderer Bedeutung ist der Fall *unabhängiger und identischer Wiederholungen*, bei dem dasselbe Experiment wiederholt durchgeführt wird, also sich die Ergebnisräume und die Wahrscheinlichkeitsmaße P_i nicht unterscheiden

Bem. 1.32. *Zufallsstichprobe vom Umfang n: (Veranschaulichung durch „Wahlbeispiel“)*

Das Experiment „Ziehen einer Person und Ermittlung ihrer Parteipräferenz“ wird n-mal unabhängig (Befragte dürfen sich nicht gegenseitig beeinflussen! [1]) durchgeführt.

Allgemeiner: Betrachte eine endliche Grundgesamtheit $\mathcal{G}=\{\mathsf{g}_1,\ \mathsf{g}_2,\ \ldots\ \mathsf{g}_N\}$, sowie ein Merkmal X mit Ausprägungen $a_1, \ldots, a_k$ und relativen Häufigkeiten $f_1, \ldots, f_k$. Es werde eine reine *Zufallsstichprobe vom Umfang n bezüglich des Merkmals X* entnommen, d.h. eine (geordnete) Zufallsauswahl (mit Zurücklegen) von n Elementen

$$\mathsf{s}_1, \ldots, \mathsf{s}_n \text{ mit } \mathsf{s}_i \in \mathcal{G}, \rangle = \infty, \ldots, \backslash$$

[1] Praktisch wird dabei auch angenommen, dass die Grundgesamtheit so groß ist, dass zwischen Ziehen mit Zurücklegen und Ziehen ohne Zurücklegen kein Unterschied besteht.

und die diesbezüglichen Ausprägungen $X(\mathsf{s}_i)$ von X erhoben.

Sei für $j = 1, \ldots k,\ i = 1, \ldots, n$ mit A_{ij} das Ereignis „$X(\mathsf{s}_i) = a_j$“ bezeichnet („Die i-te gezogene Person hat Ausprägung a_j“), so gilt für beliebige $j_1, j_2, \ldots, j_n$

$$\begin{aligned} P(A_{1j_1} \cap A_{2j_2} \cap \ldots A_{nj_n}) &= P(A_{1j_1}) \cdot P(A_{2j_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{nj_n}) \\ &= f_{j_1} \cdot f_{j_2} \cdot \ldots \cdot f_{j_n} \end{aligned}$$

Bsp. 1.33.

Unmittelbar nach Schließung der Wahllokale 2002 habe man eine reine Zufallsauswahl vom Umfang 10 unter den Wählern vorgenommen. Illustrieren und formalisieren Sie die Fragestellung im eben dargestellten Rahmen und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mindestens 9 PDS-Anhänger in der Stichprobe zu haben?

Amtliches Endergebnis:

SPD:	$38,5\%$
CDU/CSU:	$38,5\%$
Grüne:	8.6%
FDP:	$7,4\%$
PDS:	$4,0\%$
Sonstige:	$3,0\%$