1.3 Stochastische Unabhängigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeiten

Ziel: komplexere Modelle aus Verkettung („Koppelung“) von Zufallsexperimenten bauen, insbesondere Ziehung von n-Personen aus n-maliger Ziehung einer Person
$\Rightarrow$ erster Schritt: Modellieren von zwei sich nicht gegenseitig beeinflussenden Experimenten („unabhängige Experimente“).
Vorbereitend: Unabhängigkeit von Ereignissen

1.3.1 Stochastische Unabhängigkeit

Definition 1.22. *Stochastische Unabhängigkeit:*

Zwei Ereignisse A und B heißen *(stochastisch) unabhängig* (unter P), wenn gilt

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$

andernfalls heißen sie *stochastisch abhängig*.

Bem. 1.23.

- „Stochastische Abhängigkeit“ bedeutet nicht „kausale Abhängigkeit“ (vgl. die Überlegungen zu Korrelation und Kausalität in Statistik I).

- Die (stochastische) Unabhängigkeit ist eine symmetrische Beziehung in dem Sinne, dass A und B genau dann unabhängig sind, wenn B und A unabhängig sind.

  Genauer gilt die Äquivalenz folgender Aussagen:

A und B	sind stochastisch unabhängig.	
A und $\bar{B}$	"	.
$\bar{A}$ und B	"	.
$\bar{A}$ und $\bar{B}$	"	.

- Die Verwandtschaft zur empirischen Unabhängigkeit aus Statistik I:

$$f_{ij} = f_{i\bullet} f_{j\bullet} \text{ für alle } i, j$$

ergibt sich, wenn man sich durch A und B eine $(2 \times 2)-$Tafel erzeugt denkt, in der anstatt der Häufigkeiten die Wahrscheinlichkeiten stehen:

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	

Unabhängigkeit:

$$\begin{aligned} \text{gemeinsame Verteilung} &= \text{Produkt der Randverteilungen} \\ P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

analog für $\overline{A}, \overline{B}$, (vgl. obige Äquivalenz)

Bsp. 1.24. [verfälschte Würfel, vgl. Bsp. 1.20]

a) Betrachten Sie die Situation von Beispiel 1.20
Sind hier die Ereignisse $A = \{1, 3\}$ und $C = \{3, 4\}$ stochastisch unabhängig?

b) Unabhängigkeit ist eine Eigenschaft, die vom Wahrscheinlichkeitsmaß abhängt. Betrachtet man wieder $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, jetzt aber mit $P(\{1\}) = \frac{1}{9}$, $P(\{2\}) = \frac{1}{9}$, $P(\{3\}) = \frac{1}{18}$, $P(\{4\}) = \frac{5}{18}$, $P(\{5\}) = \frac{2}{9}$, $P(\{6\}) = \frac{2}{9}$,

so sind hier A und C stochastisch **un**abhängig (selbes Ω, anderes Wahrscheinlichkeitsmaß!).

Definition 1.25. *Stochastische Unabhängigkeit mehrerer Ereignisse:*

Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ heißen (vollständig) stochastisch unabhängig, wenn für alle $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Bem. 1.26.

Achtung: Aus der paarweisen Unabhängigkeit

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad \text{für alle } i, j$$

folgt im Allgemeinen nicht die vollständige Unabhängigkeit.

Bsp. 1.27. *Klassisches Beispiel (Bernstein (1912))*

(Vgl. Wikipedia, „Stochastische Unabhängigkeit“, aufgerufen am 2.4.14)
Schachtel mit 4 Zetteln mit den Zahlenkombinationen: 112, 121, 211, 222.
Reine Zufallsauswahl eines Zettels.
Sei A_i „die Ziffer 1 steht an der i-ten Stelle“, $i = 1, 2, 3$, so gilt,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(\{112\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1) \cdot P(A_2) \\ P(A_1 \cap A_3) &= P(\{121\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1) \cdot P(A_3) \\ P(A_2 \cap A_3) &= P(\{211\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_2) \cdot P(A_3), \end{aligned}$$

also herrscht paarweise Unabhängigkeit, aber

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

Beobachtung von 1 an den ersten beiden Stellen schließt Ziffer 1 an der dritten Stelle aus.