Statistik II für Studierende der Soziologie und Nebenfachstudierende

Veronika Deffner

SoSe 2016

Besonderer Dank gilt Prof. Dr. Thomas Augustin für die Bereitstellung seiner Vorlesungsunterlagen, die er mit Beiträgen von Prof. Dr. Thomas Kneib, Prof. Dr. Carolin Strobl und Prof. Dr. Helmut Küchenhoff entwickelt hat.

0.1 Einleitung: Zum Gegenstand

Deskriptive vs. induktive Statistik

Deskriptive Statistik (Statistik I):

- Statistische Beschreibung einer Gesamtheit (Grundgesamtheit oder Stichprobe).
- Keine Verallgemeinerung von einer Stichprobe auf die zugehörige Grundgesamtheit angestrebt.

Induktive Statistik (Statistik II):

- Induktion: Schluss vom Teil auf das Ganze, von vielen Einzelbeobachtungen auf allgemeine Gesetze
- Speziell: Schluss von einer Stichprobe auf Eigenschaften der Grundgesamtheit („*Inferenz*“)
- Stichprobe nur Mittel zum Zweck, um Informationen über die Eigenschaften der Grundgesamtheit zu gewinnen.

Typisches Beispiel: Wahlumfrage

- Grundgesamtheit: Alle Wahlberechtigten bei der nächsten Bundestagswahl.
- Stichprobe: n „repräsentativ ausgewählte“ Wahlberechtigte
- Gesucht: Information über *alle* Wahlberechtigten, also die *Grundgesamtheit*
- Nachwahlbefragung 2013 (in %) (ARD/Infratest-dimap, 18 Uhr, `http://www.wahlrecht.de/news/2013/bundestagswahl-2013.html`)

CDU/CSU	SPD	FDP	Linke	Grüne	AfD	Piraten	Sonstige
42,0	26,0	4,7	8,5	8,0	4,9	2,5	3,4

- Nachwahlbefragung 2013 (in %) (ARD/Infratest-dimap, 22 Uhr, `http://www.wahlrecht.de/news/2013/bundestagswahl-2013.html`)

CDU/CSU	SPD	FDP	Linke	Grüne	AfD	Piraten	Sonstige
41,7	25,6	4,7	8,6	8,3	4,8	2,2	4,1

- Wahlergebnisse 2013 (in %)

CDU/CSU	SPD	FDP	Linke	Grüne	AfD	Piraten	Sonstige
41,5	25,7	4,8	8,6	8,4	4,7	2,2	4,1

- Hier: aktuelle Sonntagsfrage (7.4.2016) (in %)

CDU/CSU	SPD	FDP	Linke	Grüne	AfD	Piraten	Sonstige
34	21	7	7	13	14	/	4

Fragestellungen der induktiven Statistik

1. **Punktschätzung:**
    - Zum Beispiel: Wie groß ist der Anteil der rot-grün-Wähler unter allen Wahlberechtigten?
    - Wie erhält man aus der Stichprobe gute Schätzwerte für Charakteristika („Parameter“) der Grundgesamtheit?
    - Wann ist ein Schätzverfahren gut/besser als ein anderes?
2. **Bereichsschätzung:**
    - Typischerweise stimmt der Punktschätzer nicht mit dem wahren Wert überein.
    - Realistischer: Gib einen Bereich an, „der den wahren Anteil der schwarz-gelb-Wähler mit hoher Wahrscheinlichkeit überdeckt“.
    - Ungenauere Aussagen, dafür aber zuverlässiger.

3. Hypothesentests:

- Überprüfe aus substanzwissenschaftlicher Theorie abgeleitete Hypothesen über die Grundgesamtheit anhand der Daten.
- Zum Beispiel: Verdienen Männer wirklich mehr als Frauen?
- Ist der Unterschied „signifikant“= „überzufällig“, d.h. so groß, dass er nur mit sehr kleiner Wahrscheinlichkeit zufällig entsteht.

Bsp. 0.1. *Mineralwasserstudie*

Studie in Zusammenarbeit(Statistisches Beratungslabor (Stablab), Ltg: Prof. Küchenhoff) mit Prof. Adam (LMU)
Fragestellung: Schmeckt mit Sauerstoff angereichertes Mineralwasser besser als gewöhnliches Mineralwasser?

– Doppel–Blindstudie

– Kontroll–Gruppe: zweimal das gleiche Wasser ohne O_2

– Verum–Gruppe: Beim zweiten Mal mit O_2 angereichertes Mineralwasser

Ergebnis (Clausnitzer et al., 2004):

Placebo: 76% gaben an, dass das zweite Wasser anders schmeckt
Verum : 89 % gaben an, dass das zweite Wasser anders schmeckt

Signifikanter Effekt (überzufälliger Effekt) $\rightarrow$ Zulassung von *Adelholzener O2 Active*

4. Regressionsmodelle incl. Varianzanalyse:

- Modelle zur Beschreibung des Einflusses von Variablen
- Zum Beispiel: Welche persönlichen Merkmale beeinflussen die Wahlentscheidung besonders stark?
- Zum Beispiel: Wie hängt die Lebenszufriedenheit vom Alter ab?

  Bsp. 0.2. *Lebenszufriedenheit und Alter*

  – Gibt es eine Midlife Crisis?

  – Analysen von Panel-Daten zur subjektiven Lebenszufriedenheit mit

  – semiparametrischen Regressionsmodellen

  – WUNDER, C., WIENCIERZ, A., SCHWARZE, J. and KÜCHENHOFF, H.(2013). Well-Being over the Life Span: Semiparametric Evidence from British and German Longitudinal Data. *Review of Economics and Statistics.* 95(1), 154-167.

Datengrundlage

– Daten stammen aus den Haushaltsstichproben A (Westdeutsche) und C (Ostdeutsche) des Sozio-Ökonomischen Panels (SOEP)

– für die ausgewählten Modellvariablen liegen Beobachtungen aus den Jahren 1992, 1994 bis 2006 vor

– durchschnittliche Anzahl von Beobachtungen pro Person: 7.77

– in die Modellberechnungen gingen 102 708 vollständige Beobachtungen von 13 224 Individuen ein

– Anzahl Beobachtungen pro Jahr:

1992	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
8 145	7 720	7 943	7 606	8 052	7 550	7 403

2000	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**
7 628	7 092	7 068	7 000	6 876	6 543	6 082

Methode: Multiples Lineares Regressionsmodell

– Zielgröße: Subjektive Lebenszufriedenheit

– Einflussgrößen: Alter Gesundheit, Gehalt usw.

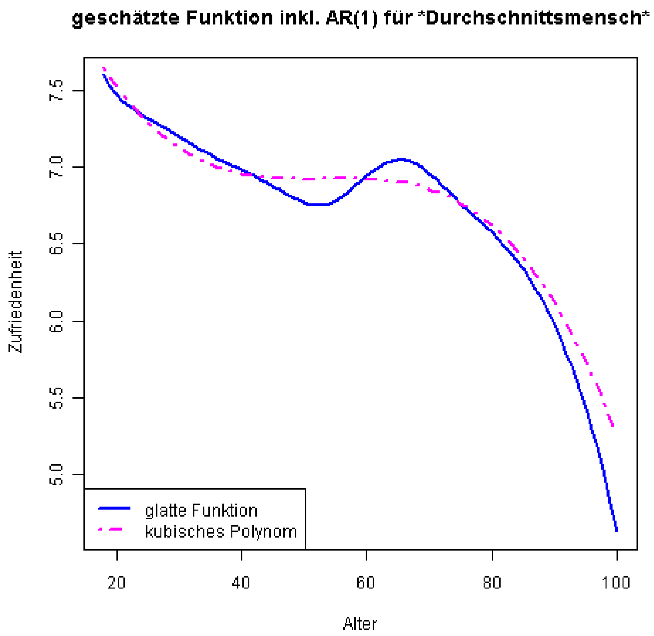
– Hauptfrage: Wie hängen Lebenszufriedenheit und Alter zusammen

– Alterseffekt wird nicht parametrisch modelliert ($\rightarrow$ Statistik III)

Ergebnisse für das Regressionsmodell

Variable	Coefficient	Standard error
Sex: female	0.074	(0.015)
Disability status: disabled	-0.452	(0.014)
Nights stayed in hospital	-0.012	(0.000)
Years of education	0.034	(0.002)
Log of net household income	0.492	(0.010)
Log of household size	-0.194	(0.012)
German	0.053	(0.020)
Full time employed	0.079	(0.011)
Part time employed	0.019	(0.012)
Unemployed	-0.597	(0.014)
Single	-0.174	(0.017)
Divorced	-0.137	(0.018)
Widowed	-0.196	(0.023)
West-Germany	0.511	(0.017)

Ergebnis für Alterseffekt



Midlife-Crisis nur bei glatter Funktion erkennbar.

Ziele und Methoden

– Zusammenhänge analysieren

– Komplexe Einflüsse

– flexibles Modell

Inferenzfehler

- Zentrales Problem der induktiven Statistik:

  $Jeder$ Induktionsschluss ist potentiell fehlerbehaftet:

- Beispielsweise ist der wahre Anteil der Wähler einer Partei in der Grundgesamtheit nicht exakt mithilfe der Stichprobe ermittelbar.

- Entscheidende Idee: Kontrolle des Fehlers mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

- Aussagen nur im Bereich bestimmter, aber kontrollierter Fehlermargen

- Vorgehen:

  * Stichprobenziehung $zuf\ddot{a}llig$

  * Verwende Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Quantifizierung/Kontrolle des Fehlers

  $\longrightarrow$ Kap. 1: Wahrscheinlichkeitsrechnung

$\longrightarrow$ Kap. 2: Wie nutzt man Wahrscheinlichkeitsüberlegungen für die Statistik?
Induktive Statistik

Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Wahrscheinlichkeit sozusagen als deduktives Analogon des induktiven statistischen Schlusses

- Ziel ist auch die Vermittlung eines „Gefühls“ für Wahrscheinlichkeiten.

- Gerade für Sozialwissenschaftler ist probabilistisches Denken (d.h. das Denken in Wahrscheinlichkeiten) unerlässlich!

- Zunächst grundlegende Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten, und wichtige Modelle, dann auch spezielle Regeln für große Stichproben (Befragungen!) Oft einfacher, da sich gewisse Regelmäßigkeiten einstellen: Insbesondere nähert sich die relative Häufigkeit eines Ereignisses unter gewissen Voraussetzungen seiner Wahrscheinlichkeit an $\rightarrow$ auch wichtig für Interpretation.

Dem so genannten Hauptsatz der Statistik folgend „wächst mit dem Stichprobenumfang in gewisser Weise die Repräsentativität der Stichprobe“

- Bei naiver Herangehensweise (ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung) kann man sich leicht täuschen. Z.B. bewerten sowohl medizinische Experten als auch Laien Risiken oft falsch.

1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

1.1 Mengen und elementare Mengenoperationen

Definition 1.1.

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung verschiedener Objekte zu einem Ganzen. Die einzelnen Objekte einer Menge werden *Elemente* genannt.

Mengen werden üblicherweise mit Großbuchstaben bezeichnet, z.B. A, B, C, . . . , M, . . . , Ω

Mengen werden später benutzt, um den Ausgang von Zufallsexperimenten zu beschreiben.

Bsp. 1.2.

- $M = \{$Hörende dieser Vorlesung$\}$.
- $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (Menge der Ergebnisse eines Würfelwurfs).

  Die Reihenfolge der Aufzählung spielt (im Gegensatz zu Tupeln) keine Rolle:

  $$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \; = \; \{1, 3, 5, 2, 4, 6\}$$

  Jedes Element wird nur einmal genannt.
- $M = \{K, Z\}$ (Menge der Ergebnisse eines Münzwurfs, K=Kopf, Z=Zahl).
- Charakterisierung von Mengen mit einer gewissen Eigenschaft:

  $$\{1, 2, 3, \ldots, 10\} = \{x \,|\, x \text{ ist eine natürliche Zahl } \leq 10\}$$

  Die Menge aller x mit der Eigenschaft „x ist eine natürliche Zahl ≤ 10“.

Standardmengen:

$\mathbb{N}$	$= \{1, 2, 3, \ldots\}$	: Menge der natürlichen Zahlen,
$\mathbb{N}_0$	$= \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	: Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0,
$\mathbb{Z}$	$= \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$	: Menge der ganzen Zahlen,
$\mathbb{R}$	$= (-\infty, \infty)$	: Menge der reellen Zahlen,
$\emptyset$		: leere Menge.

Grundlegende Begriffe der Mengenlehre: Illustration anhand der Mengen

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \{\text{CDU/CSU, SPD, FDP, Grüne, Linke, Sonstige}\} \\
A &= \{\text{CDU/CSU, SPD, FDP, Grüne}\} \\
B &= \{\text{CDU/CSU, SPD, FDP}\} \\
C &= \{\text{SPD, FDP, Grüne}\}
\end{aligned}
$$

- **Elementeigenschaft:**

  x ist Element der Menge M: $x \in M$

  x ist nicht Element der Menge M: $x \notin M$

- **Teilmengen:** M_1 ist Teilmenge von M_2, in Zeichen $M_1 \subset M_2$, wenn jedes Element von M_1 auch in M_2 ist.

- **Graphische Darstellung: Venn Diagramm**

Für jede Menge M gilt:

$\emptyset \subset M$ Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge, denn jedes Element in $\emptyset$ ist in M (Aussagen über den leeren Quantor sind wahr)

$M \subset M$ d.h. „ $\subset$ “ enthält implizit „ $=$ “, deshalb in Literatur manchmal auch $\subseteq$ statt $\subset$ geschrieben

- **Schnittmenge:** Die Schnittmenge $M_1 \cap M_2$ ist die Menge aller Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind:

$$M_1 \cap M_2 = \{x | x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$$

Weitere Eigenschaften:

* Gilt $M_1 \subset M_2$, so ist $M_1 \cap M_2 = M_1$.
* Für jede Menge M_1 gilt: $M_1 \cap M_1 = M_1$ und $M_1 \cap \emptyset = \emptyset$.
* Zwei Mengen M_1 und M_2 mit $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, d.h. zwei Mengen, die kein gemeinsames Element haben, heißen *disjunkt*.
* Die Schnittmenge aus n Mengen $M_1, \ldots, M_n$ enthält alle Elemente, die in jeder der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ enthalten sind und wird bezeichnet mit

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n.$$

- **Vereinigungsmenge:** Die Vereinigungsmenge $M_1 \cup M_2$ ist die Menge aller Elemente, die in M_1 oder M_2 enthalten sind:

$$M_1 \cup M_2 = \{x | x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$$

Bem. 1.3.

* Vorsicht: Das „oder“ ist *nicht* exklusiv gemeint, also nicht „entweder oder“, sondern als „in M_1 oder in M_2 oder in beiden“.

* Die Vereinigungsmenge aus n Mengen $M_1, \ldots, M_n$ enthält alle Elemente, die in mindestens einer der Mengen $M_1, \ldots, M_n$ enthalten sind und wird bezeichnet mit

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i := M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$$

- **Differenzmenge:** Die Differenzmenge $M_1 \setminus M_2$ ist die Menge aller Elemente, die in M_1, aber nicht in M_2 enthalten sind:

$$M_1 \setminus M_2 = \{x|x \in M_1 \text{ aber } x \notin M_2\}$$

Im Beispiel:

- **Komplementärmenge:** Die Komplementärmenge $\overline{M}$ bezüglich einer Grundmenge Ω ist die Menge aller Elemente von Ω, die nicht in M sind:

$$\overline{M} = \{x \in \Omega | x \notin M\}$$

Im Beispiel:

Bem. 1.4.

* Die Komplementärmenge ist nur unter Bezugnahme auf eine Grundmenge Ω definierbar.
* Es gilt $\overline{M} = \Omega \setminus M$.
* Es existieren noch weitere Schreibweisen für die Komplementärmenge, z.B. M^C, $\mathcal{C}M$.
* „Tertium non datur“ (Grundlegendes Prinzip der Mengenlehre (und der Logik): Für jedes Element $x \in \Omega$ gilt entweder $x \in M$ oder $x \in \overline{M}$

- **Potenzmenge:** Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ist die Menge aller Teilmengen von M:

$$\mathcal{P}(M) = \{N | N \subset M\}.$$

Im Beispiel:

$$\mathcal{P}(B) \quad =$$

- **Mächtigkeit:** Die Mächtigkeit $|M|$ einer Menge M ist die Anzahl der Elemente von M

  Im Beispiel:

Rechenregeln für Mengen

1. Kommutativgesetze (Vertauschung):

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1, \quad M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1.$$

2. Assoziativgesetze (Zusammenfassen):

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3).$$

$$(M_1 \cup M_2) \cup M_3 = M_1 \cup (M_2 \cup M_3).$$

3. Distributivgesetze (Ausklammern/Ausmultiplizieren):

$$(M_1 \cup M_2) \cap M_3 = (M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3).$$
$$(M_1 \cap M_2) \cup M_3 = (M_1 \cup M_3) \cap (M_2 \cup M_3).$$

4. De Morgansche Regeln:

$$(\overline{M_1 \cup M_2}) = \overline{M_1} \cap \overline{M_2}$$
$$(\overline{M_1 \cap M_2}) = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$$

5. Aus $M_1 \subset M_2$ folgt $\overline{M_2} \subset \overline{M_1}$.
6. Für die Differenzmenge gilt $M_1 \setminus M_2 = M_1 \cap \overline{M_2}$.
7. Für die Potenzmenge gilt $|\mathcal{P}(M_1)| = 2^{|M_1|}$.

Das kartesische Produkt

Das kartesische Produkt zweier Mengen

$$M = \{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k\}$$
$$N = \{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_l\}$$

ist die Menge

$$M \times N := \Big\{(m_i, n_j) \;\Big|\; i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, l\Big\}$$

Sie besteht also aus allen möglichen Kombinationen, so dass

$$\begin{aligned} M \times N \quad = \quad & \Big\{(m_1, n_1), (m_1, n_2), (m_1, n_3), \ldots, (m_1, n_l), \\ & (m_2, n_1), (m_2, n_2), (m_2, n_3), \ldots, (m_2, n_l), \\ & \qquad \vdots \\ & (m_k, n_1), (m_k, n_2), (m_k, n_3), \ldots, (m_k, n_l)\Big\} \end{aligned}$$

Bsp. 1.5.

$$\begin{aligned} M &= \{1, 2, 3\} \\ N &= \{1, 2, 3, 4\} \\ M \times N &= \end{aligned}$$

Achtung: Bei den Elementen von $M \times N$ handelt es sich um Tupel, das heißt die Reihenfolge ist wichtig! (z.B. $(1, 2)$ ist etwas anderes als $(2, 1)$, vgl. Statistik I, Kapitel 5)

Verallgemeinerungen:

- Das kartesische Produkt der Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ wird mit

$$\bigtimes_{i=1}^{n} M_i = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$$

bezeichnet und besteht aus allen möglichen n-Tupeln, die sich (unter Beachtung der Reihenfolge) aus Elementen aus $M_1, M_2, \ldots, M_n$ bilden lassen.

- Die Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ müssen nicht endlich sein; für endliche Mengen gilt

$$\left| \bigtimes_{i=1}^{n} M \right| = |M_1| \cdot |M_2| \cdot \ldots \cdot |M_n|$$

- Kartesische Produkte werden verwendet, um Ergebnisse komplexer Experimente aus Einzelexperimenten zusammenzusetzen.

1.2 Wahrscheinlichkeit – Ein komplexer Begriff und seine Formalisierung

1.2.1 Zufallsvorgänge

Ein Zufallsvorgang führt zu einem von mehreren, sich gegenseitig ausschließenden Ergebnissen. Es ist vor der Durchführung ungewiss, welches Ergebnis eintreten wird.

Was benötigen wir zur Beschreibung eines Zufallsvorganges?

Zwei wesentliche Aspekte:

a) Welche Ergebnisse eines Zufallsvorgangs sind möglich?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten die einzelnen Ergebnisse ein?

Zur Beantwortung geht man folgendermaßen vor:

zu a) Festlegen eines *Ergebnisraums* (Grundraum, Stichprobenraum) Ω, der alle als möglich erachteten *Ergebnisse* ω enthält.

Beispiele:

Teilmengen A von Ω bezeichnet man als *Ereignisse*, Ereignisse sind also bestimmte *Mengen von Ergebnissen*.

Beispiele:

Die einelementigen Teilmengen (also die Ereignisse, die genau ein Ergebnis ω enthalten) werden als *Elementarereignisse* bezeichnet.

zu b) Eine Wahrscheinlichkeitsbewertung ordnet jedem Ereignis seine Wahrscheinlichkeit zu. Eine Wahrscheinlichkeit ist also eine Abbildung von Ereignissen (Elementen der Potenzmenge von Ω) auf reelle Zahlen:

$$\begin{aligned} P : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto P(A) \end{aligned}$$

Dabei sollen gewisse fundamentale Rechenregeln gelten, z.B.

Beachte: Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist an sich sehr komplex und hat eine aufregende Geschichte. Es gab – und gibt immer noch – eine intensive Grundsatzdebatte, was Wahrscheinlichkeiten sind, wie sie zu verstehen und zu formalisieren sind. Es hat sich aber eingebürgert, diese – meines Erachtens sehr spannende und wichtige Grundlagendiskussion – zugunsten einer pragmatischen Sicht auszublenden. Basierend auf einem intuitiven Verständnis sowie nahe liegende (und axiomatisierte) Rechenregeln „wird einfach gerechnet" und die Ergebnisse werden für eine leistungsfähige statistische Analyse genutzt. Diese Vorgehensweise ist auch deshalb pragmatisch erfolgreich, da sich damit eine Reihe von Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten mathematisch folgern lassen, die wiederum zum Verständnis und zur Interpretierbarkeit des formalen Konstrukts „Wahrscheinlichkeit" beitragen. Wir folgen dieser Vorgehensweise insofern, als auch hier zunächst ein wenig mit Wahrscheinlichkeiten basierend auf einem vereinfachten Spezialfall gerechnet wird; einige Anmerkungen zur Geschichte und Interpretation folgen dann am Schluss dieses Kapitels 1.2.

1.2.2 Laplace-Wahrscheinlichkeiten (kombinatorische Wahrscheinlichkeiten)

"Erzeugung von Wahrscheinlichkeiten aus perfekter Symmetrie unter den Ergebnissen/ Elementarereignissen"

Häufig: Alle möglichen Elementarereignisse sind, wie etwa bei einem fairen Würfel, *gleich* wahrscheinlich, d.h.

$$P(\{\omega_j\}) = \frac{1}{|\Omega|}$$

. In diesem Fall sprechen wir von einem *Laplace-Experiment*.

Abzählregel:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} \tag{1.1}$$

Laplace-Wahrscheinlichkeit: In einem Laplace-Experiment gilt:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Bsp. 1.6.

Es wird sich – für die Standardtheorie – zeigen: Ein Zufallsvorgang ist ausreichend genau beschrieben, wenn jedem Elementarereignis eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet ist, die Wahrscheinlichkeiten komplexerer Ereignisse können dann berechnet werden.

Bsp. 1.7. [Dreimaliger Münzwurf]

Wir werfen dreimal unabhängig[1] voneinander eine faire Münze und notieren jeweils, ob die Münze Wappen oder Zahl anzeigt. Man beschreibe den Ergebnisraum und berechne die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, mindestens einmal Wappen zu erhalten und genau zweimal Wappen zu erhalten.

[1] D.h. die Ergebnisse der einzelnen Würfe beeinflussen sich nicht gegenseitig, siehe später.

1.2.3 Urnenmodelle

Es hat sich eingebürgert, gewisse Grundsituationen, die in der praktischen Stichprobenziehung immer wieder vorkommen, als „Urnenmodelle“ zu prototypiesieren und damit vom konkreten Kontext zu abstrahieren. Man stellt sich eine Urne mit Kugeln vor und zieht daraus dann in einer bestimmten Art und Weise eine bestimmte Anzahl von Kugeln (*Stichprobe*). In der Sozialwissenschaft entspricht jede „Kugel“ einer interessierenden Einheit (Person, Haushalt) und die „Urne“ einer gedachten Gesamtliste dieser Einheiten.

Eine typische Unterscheidung der verschiedenen Ziehungsvorgänge besteht darin, ob eine Einheit mehrfach in eine Stichprobe gelangen kann (*„Ziehen mit Zurücklegen“*, die gezogene Kugel wird also wieder in die Urne zurückgelegt) oder *„Ziehen ohne Zurücklegen“* (die gezogenen Kugeln bleiben also außerhalb der Urne).

Dabei ist zu berücksichtigen:

1. das Ziehen von n Kugeln ohne Zurücklegen entspricht einem n-fachen einmaligen Zug aus der Urne.

2. Typischerweise sind Stichproben ohne Zurücklegen praktisch einfacher zu realisieren.

3. Für sehr große Grundgesamtheiten sind typischerweise bei realistischen Stichprobengrößen die Unterschiede zwischen mit und ohne Zurücklegen verschwindend gering. Die Unterscheidung zwischen mit und ohne Zurücklegen wird hier – aus Rücksicht auf die Gepflogenheiten der üblichen Literatur – zunächst aufrechterhalten. Bei der konkreten Berechnung wird aber auch meist die Situation ohne Zurücklegen durch die viel einfacher behandelbare Situation mit Zurücklegen angenähert.

Bem. 1.8. *Urnenmodell: Ziehen mit Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge*

- Grundgesamtheit mit N Einheiten (mit Nummern identifiziert): $\{1, \ldots, N\}$.
- Ziehe Stichprobe vom Umfang n mit Zurücklegen.
- Zur Beschreibung des Zufallsvorgangs müssen wir die Anzahl der potentiell möglichen Stichprobenergebnisse bestimmen (jede Stichprobe ist gleichwahrscheinlich).
- $\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) | \omega_j \in \{1, \ldots, N\}\}$, dasselbe Element kann mehrfach vorkommen.
- $|\Omega| = \underbrace{N \cdot N \cdot \ldots \cdot N}_{n\text{-mal}} = N^n$, d.h. N^n potentiell mögliche Stichproben vom Umfang n.

Bem. 1.9. *Urnenmodell: Ziehen ohne Zurücklegen, mit Berücksichtigung der Reihenfolge*

- Ziehe Stichprobe vom Umfang n ohne Zurücklegen.
- $\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n), \omega_j \in \{1, \ldots, N\}, \omega_j \neq \omega_i$ für $i \neq j\}$, jedes Element kann nur einmal vorkommen.
- Anzahl möglicher Stichproben:

  * $|\Omega| = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1. Ziehung}}}{N} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2. Ziehung}}}{(N-1)} \cdot \ldots \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ n\text{-te Ziehung}}}{(N-n+1)}$

* Spezialfall $n = N$ (völlige Entleerung der Urne):
  Ziehe aus der Urne *alle* Kugeln und notiere diese in der gezogenen Reihenfolge. Gleichbedeutend mit der zufälligen Anordnung der N verschiedenen Zahlen. Bezeichnungsweise: $Permutation$ der N Zahlen.

$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) : \omega_j \in \{1, \ldots, N\}, \omega_j \neq \omega_i$ für $i \neq j\}$
$|\Omega| = N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
Die entsprechende Anzahl wird als „*Fakultät*“ (in Zeichen: $N!$) bezeichnet.
Für $N \in \mathbb{N}$ definiert man also:

$$N! := N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Es gilt: 0!=1.

* Damit ergibt sich beim Ziehen von n Elementen aus N Elementen ohne Zurücklegen

$$|\Omega| = N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-n+1) =$$

$$= \frac{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-n+1) \overbrace{(N-n) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}}{\underbrace{(N-n) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}_{\text{künstlich erweitert}}} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

Bsp. 1.10. [Glücksspirale]

- Gewinnzahl bei Glücksspirale hat 7 Stellen.
- Ziehungsstrategie des ZDF in der ersten Ziehung (1970): Urne mit jeweils 7 Kugeln der Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$. Insgesamt sind also 70 Kugeln in der Urne. Ziehe nacheinander ohne Zurücklegen 7 Kugeln.
- Frage: Sind alle möglichen Gewinnzahlen gleichwahrscheinlich?
- Hier Illustration bei einer Gewinnzahl mit 3 Stellen :
- Bei der originalen Glücksspirale mit 7 Stellen waren mit der Ziehungsstrategie des ZDF manche Gewinnzahlen mehr als 100 mal wahrscheinlicher als andere Zahlen!

Bsp. 1.11. [Problem des Handlungsreisenden]

- Handlungsreisender soll 5 Städte besuchen.
- Frage: Wie viele Möglichkeiten hat er, eine bestimmte Reihenfolge festzulegen?
- Antwort: $5! = 120$
- Bei 10 Städten sind es bereits $10! = 3628800$ Möglichkeiten, bei 50 Städten ergeben sich $50! = 3.041409e + 64$
- klassisches Problem: In welcher Reihenfolge sollen die Städte besucht werden, um den Fahrtweg zu minimieren? Das Problem ist sehr schwer zu lösen wegen der großen Anzahl an Möglichkeiten.

Bem. 1.12. *Urnenmodell: Ziehen ohne Zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge*

- Ziehe n Kugeln aus einer Urne mit N nummerierten Kugeln. Die Reihenfolge der Ziehungen spielt keine Rolle, d.h. die Stichprobe „4,1,7“ wird nicht unterschieden von „7,1,4“.

- $\Omega = \{\underbrace{\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}}_{\text{Jetzt Mengen!}} : \omega_j \in \{1, \ldots, N\}, \omega_j \neq \omega_i \text{ für } j \neq i\}$

- Anzahl der Stichproben:

$$|\Omega| = \frac{N!}{(N-n)! \cdot n!} = \binom{N}{n}$$

Herleitung: Man berücksichtigt zunächst die Reihenfolge. Gemäß Bemerkung 1.9 gibt es hier

$$\frac{N!}{(N-n)!}$$

Möglichkeiten.

Da die Reihenfolge unter den ersten n Kugeln aber keine Rolle spielen soll, sind jeweils $n!$ geordnete Stichproben wiederum äquivalent, es gibt also insgesamt

$$\frac{N!}{(N-n)!\,n!}$$

verschiedene Stichproben.

Bem. 1.13. *Binomialkoeffizient*

Der *Binomialkoeffizient* $\binom{N}{n}$ ist definiert als

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)! \cdot n!}\,.$$

Es gilt:

$$\binom{N}{0} = 1, \binom{N}{1} = N, \binom{N}{N} = 1\,, \quad \binom{N}{n} = 0, \text{ falls } N < n\,.$$

Bsp. 1.14. [Lottozahlen]

- Frage: Wie viele verschiedene mögliche Ziehungen gibt es?
- Antwort: Entspricht der Ziehung ohne Zurücklegen von 6 Zahlen aus 49, d.h.

$$|\Omega| = \binom{49}{6} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = 13983816.$$

Dann gilt

$$P(\text{„6 Richtige"}) = \frac{1}{13983816} = 0.000000072 = 0.000072‰$$

- Frage: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, 5 Richtige zu bekommen?