Aufgabe 34

Betrachten Sie die Situation aus Aufgabe 32.

a) Was versteht man unter dem sog. MSE?

b) Berechnen Sie den MSE der Schätzer T_a, T_b und T_c (Sie dürfen die schon berechneten Größen direkt verwenden).

Aufgabe 35

Im Folgenden sehen Sie die Herleitung des Maximum-Likelihood-Schï¿½tzers fï¿½r μ und fï¿½r σ^2 einer normalverteilten Zufallsvariablen X_i. Gegeben seien n unabhï¿½ngig und identisch verteilte (*iid*) Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ mit konkreten Realisationen $x_1, ..., x_n$.

Fï¿½llen Sie die Lï¿½cken aus!

Wichtig fï¿½r beide Schï¿½tzer!

- 1. Schritt: Bestimme die ______________________________

$$
\begin{aligned}
L(\underline{\quad},\underline{\quad}) = \prod_{i=1}^{n} f_{(\underline{\quad},\underline{\quad})}(\underline{\quad}) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)
\end{aligned}
$$

- 2. Schritt: Bestimme die ______________________________

$$
\begin{aligned}
l(\underline{\quad},\underline{\quad}) &= \ln(L(\underline{\quad},\underline{\quad})) \\
&= \ln(1) - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2
\end{aligned}
$$

a) **ML-Schï¿½tzer fï¿½r μ, d.h. μ unbekannt, σ^2 bekannt**

- 3. Schritt: Ableiten nach ______________________________

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \_\_\_} = \frac{1}{2\sigma^2} 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

- 4. Schritt: ______________________________

$$\frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu) \stackrel{!}{=} \_\_\_ \qquad \Longleftrightarrow \qquad \_\_\_\_\_\_ \qquad \text{also} \qquad \hat{\mu} = \_\_\_.$$

b) **ML-Schï¿½tzer fï¿½r $\sigma 2$, d.h. μ bekannt, σ^2 unbekannt**

- 3. Schritt: Ableiten nach ______________________________

$$\frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \_\_\_} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

- 4. Schritt: ______________________________

  (Einsetzen von $\hat{\mu} = \bar{x}$)

$$\begin{aligned}
& -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \stackrel{!}{=} ___ \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{1}{2\sigma^2}\big(- n + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2\big) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = n\sigma^2 \\
\text{also} \quad & \hat{\sigma}^2 = ______
\end{aligned}$$

Hinweis: Wiederholen Sie die Rechenregeln fï¿½r den Logharithmus!

Aufgabe 36

Die Zeit, die eine Mannschaft ohne Gegentor bleibt (in Minuten ab Beginn der Fußball-Europameisterschaft), wird als zufällig angenommen. Als Modell für die Wartezeit bis zum ersten Gegentor betrachtet man die Zufallsvariable X_i, von der angenommen wird, dass sie *exponentialverteilt* ist mit Parameter $\lambda > 0$ und $x_i \geq 0$. Die Dichte ist also $f(x_i) = \lambda \exp(-\lambda x_i)$.
Man betrachte nun n Mannschaften, wobei die Wartezeit bis zum ersten Gegentor pro Mannschaft durch die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ beschrieben wird.

a) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}$ für die n Beobachtungen.

b) In der Fußball-Europameisterschaft 2012 ergeben sich für die teilnehmenden 16 Mannschaften die folgenden Zeiten ohne Gegentor:

Mannschaft	Zeit	Mannschaft	Zeit
Polen	50	Spanien	59
Griechenland	16	Italien	63
Russland	51	Irland	2
Tschechien	14	Kroatien	18
Niederlande	23	Frankreich	29
Dänemark	113	England	38
Deutschland	162	Ukraine	51
Portugal	71	Schweden	54

Berechnen Sie für diese Daten den Maxiumum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\lambda}$.

c) Halten Sie die Exponentialverteilung für ein realistisches Modell für die Wartezeit bis zum ersten Gegentor?