

Aufgabe 14

Ein Zufallsexperiment besteht im Werfen einer Münze mit $\Omega = \{\text{,Kopf'}, \text{,Zahl'}\}$. Das Experiment wird durch die Zufallsvariable X beschrieben mit

$$\begin{aligned} \{X = 1\} &= \text{,Kopf'}, & P(\{X = 1\}) &= p, \\ \{X = 0\} &= \text{,Zahl'}, & P(\{X = 0\}) &= 1 - p. \end{aligned}$$

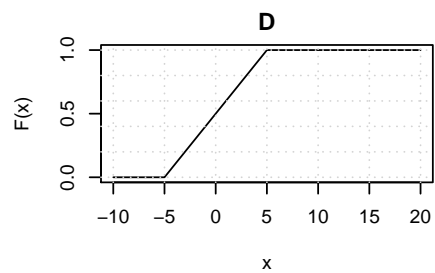
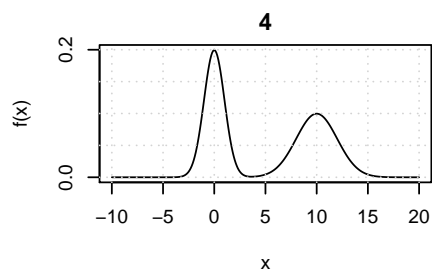
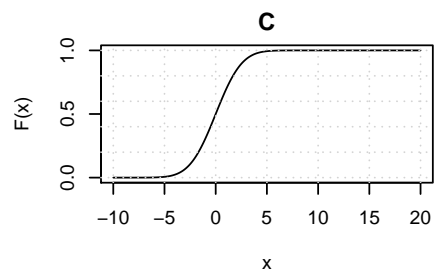
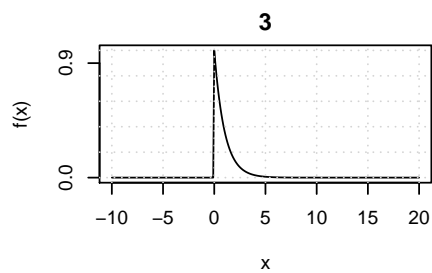
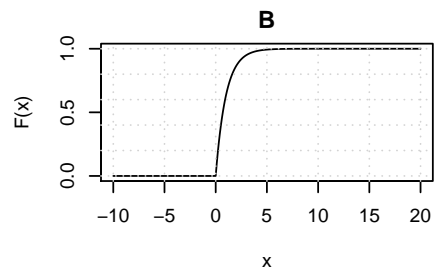
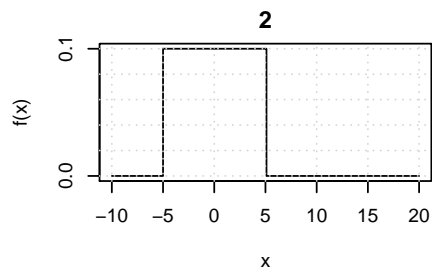
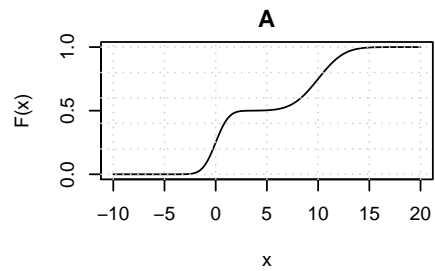
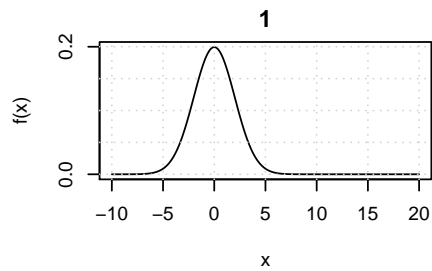
Nun werde die Münze unabhängig viermal hintereinander geworfen, wobei der i -te Wurf durch die Zufallsvariable $X_i, i = 1, \dots, 4$ beschrieben wird.

Die Zufallsvariable Z wird definiert als $Z := \sum_{i=1}^4 X_i$.

- Interpretieren Sie die Zufallsvariable Z .
- Welche Werte kann Z annehmen?
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte von Z .
- Zeichnen Sie die Verteilungsfunktion von Z für $p = \frac{1}{2}$ und $p = \frac{1}{3}$.
- Bestimmen Sie aus den Verteilungsfunktionen für $p = \frac{1}{2}$ und $p = \frac{1}{3}$ die Wahrscheinlichkeiten, mindestens zwei Mal Kopf zu erhalten.

Aufgabe 15

Betrachten Sie folgende Dichtefunktionen (links) und Verteilungsfunktionen (rechts).



- a) Ordnen Sie jeder Dichtefunktion die zugehörige Verteilungsfunktion zu! Haben Sie eine Vermutung, um welche Verteilungen es sich handelt?
- b) Bestimmen Sie aus den Grafiken $P(X = 7)$, $P(X \leq 5)$ und $P(0 \leq X \leq 5)$.

Aufgabe 16

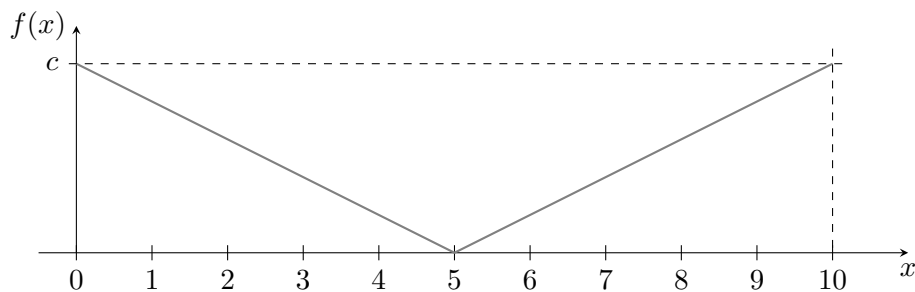
Zur Modellierung von Lebensdauern wird häufig die sogenannte Exponentialverteilung herangezogen mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

- a) Skizzieren Sie die Dichte der Exponentialverteilung.
- b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung.
- c) Die Lebensdauer X eines Laptops sei exponentialverteilt mit $\lambda = 0.25$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ...
 - (i) ... der Laptop spätestens nach drei Jahren kaputt geht.
 - (ii) ... die Lebensdauer des Laptops mindestens fünf Jahre beträgt.
 - (iii) ... der Laptop mindestens 2 Jahre und höchstens 7 Jahre funktioniert.
- d) Wie findet man graphisch anhand der Dichte bzw. anhand der Verteilungsfunktion die gesuchte Wahrscheinlichkeit?

Aufgabe 17

Für die Wartezeit bis auf den Bus, der alle 10 Minuten fährt, soll die unten skizzierte Dichte gelten.



- a) Geben Sie eine Formel für die skizzierte Dichte an.
Hinweise:
 - Bestimmen Sie zunächst c .
 - Für die Fläche eines Dreiecks gilt: Fläche = $0.5 \cdot \text{Breite} \cdot \text{Höhe}$.
 - Machen Sie für die Formel die Fallunterscheidung $x \in [0, 5]$ vs. $x \in (5, 10]$ vs. sonst.

b) Zeigen Sie, dass für die Verteilungsfunktion gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{50}(10x - x^2) & \text{für } x \in [0, 5] \\ \frac{1}{50}(x^2 - 10x) + 1 & \text{für } x \in (5, 10] \\ 1 & \text{für } x > 10 \end{cases}$$