Mathematische Ergänzung für Nebenfachstudierende

Übungsblatt 5 **(Schneider, Plaß, Jansen)** **Sommersemester 16**

Aufgabe 1 (Vollständige Induktion und Reihen)

Beweisen Sie die folgenden Ausagen mittels vollständiger Induktion über n:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Was folgt für das Grenzverhalten der zugehörigen unendlichen Reihen?

Aufgabe 2 (Bernoullis Ungleichung)

Zeigen Sie: Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung
$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Aufgabe 3 (Stetigkeit)

(a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion
$$f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} c - x^2 & \text{falls } x < 0 \\ x^2 - c & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$
für die Fälle $c = 1, 2, 3$. Für welche Werte von $c \in \mathbb{R}$ ist f_c stetig im Punkt $x = 0$, für welche nicht? Begründen Sie Ihre Antort.

(b) Beweisen Sie: Die Gleichung $e^x - 2x^2 = 0$ besitzt eine Lösung in $\mathbb{R}$.