Aufgabe 1 (Häufungspunkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Ein Wert $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall N \in \mathbb{N} \;\; \exists n > N : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

a) Verbalisieren Sie die oben stehende Definition. Wie unterscheidet sich die Definition eines Häufungspunktes von der des Grenzwerts einer Folge?

b) Betrachten Sie die Folge $\left((-1)^n \frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Berechnen Sie die ersten zehn Folgeglieder und zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem. Besimmen Sie anschließend alle Häufungspunkte der Folge.

Aufgabe 2 (Wiederholung Folgen)

a) Geben Sie - falls möglich - ein Beispiel ...
   - ... für eine streng monoton fallende, beschränkte Folge, die nicht konvergiert
   - ... für eine unbeschränkte Folge mit konvergenter Teilfolge

b) Ist die Folge $a_n = \frac{2n+1}{2n-1}$, $n \geq 1$, streng monoton fallend?

c) Gegen welchen Grenzwert konvergieren beliebige Teilfolgen von a_n?

d) Betrachten Sie die Teilfolgen b_{2k}, b_{4k+1} und b_{4k+3} der Folge $b_n = \frac{n \sin(\frac{n\pi}{2})}{n+\sin(\frac{n\pi}{2})}$, $n \in \mathbb{N}$, und geben Sie Häufungspunkte der Folge b_n an.

Aufgabe 3 (Vorbereitung Reihen)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Definiere damit die neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$.

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$. Berechnen Sie die Werte $s_1, \ldots, s_{10}$. Welche Vermutung hegen Sie?

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt durch $R > 0$. Zeigen Sie, dass dann $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist.