Aufgabe 1 (Monotonie von Folgen)

a) Überprüfen Sie die nachstehenden Folgen auf Monotonie:
   - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n := \frac{1}{n+1}$
   - $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $b_n := \frac{n^2-1}{n}$
   - $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $c_n := \frac{1+6n+2n^2}{(n+3)n}$

b) Ist die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d_n := \frac{1}{(-2)^n} \cdot \frac{1}{1+2n}$ monoton steigend oder fallend?

c) Finden Sie eine geeignete (unendliche) Menge $D \subset \mathbb{N}$, so dass gilt: Die Folge $(d_n)_{n\in D}$ ist streng monoton fallend.

Aufgabe 2 (Beschränktheit von Folgen, Supremum und Infimum)

a) Betrachten Sie die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $e_n := \frac{n}{n+1}$. Ist e_n nach oben und/oder nach unten beschränkt? Finden Sie gegenenfalls jeweils eine geeignete Schranke.

b) Bestimmen Sie die Ausdrücke $\sup\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\inf\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Beweisen Sie Ihre Antworten.

c) Bestimmen Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} := (e_{n+1} - e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Welche Eigenschaften hat f_n? Was vermuten Sie deswegen für e_n?

Aufgabe 3 (Eindeutigkeit des Supremums und des Infimums)

Sei $S \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben (bzw. unten) beschränkt. Zeigen Sie, dass das Supremum (bzw. Infimum) von S dann eindeutig bestimmt ist.