b) Bayes-Aktionen und Zulässigkeit

Satz 2.58 (Bayes-Aktionen zu nicht entarteter Priori)

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ mit Priori-Bewertung $\pi(\cdot)$ so, dass $\pi(\{\vartheta_j\}) > 0$ für alle j.
Dann gilt: Jede Bayes-Aktion a^* zu $\pi(\cdot)$ ist zulässig.

Bem. 2.59 (Eine Erweiterung von Satz 2.58)

In der statistischen Entscheidungstheorie gilt meist $\Theta \subset \mathbb{R}^k$. Somit entzieht sich diese oftmals dem Anwendungsbereich von Satz 2.58. Will man den Satz auf überabzählbare Parameteräume erweitern, so braucht man eine andere Definition der Nicht-Entartetheit einer Priori-Verteilung (da W'maße auf $\mathcal{B}^k$ den Einermengen zwangsläufig Masse 0 zuteilen müssen). Man geht hier üblicherweise zum Begriff des Trägers eines Wahrscheinlichkeitsmaßes über:

Sei $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ und sei π ein Wahrscheinlichkeitsmaß aud $(\Theta, \mathcal{B}^k|_\Theta)$. Der *Träger* von π ist die Menge aller ϑ_0 mit der Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad \pi(\{\vartheta : |\vartheta - \vartheta_0| < \varepsilon\}) > 0$$

Der Träger von π besteht also aus allen Zuständen, um die man keine offene Kugel findet, der π die Masse 0 zuordnet. Wir schreiben $\operatorname{supp}(\pi)$.

Es gilt dann der folgende Satz:

Sei $(\mathbb{A}, \Theta, u)$ ein Entscheidungsproblem mit $\Theta \subset \mathbb{R}^k$ offen und sei π ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Theta, \mathcal{B}^k|_\Theta)$. Zusätzlch seien die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. $\operatorname{supp}(\pi) = \Theta$

2. $u(a, \cdot)$ ist stetig in ϑ für jedes feste $a \in \mathbb{A}$

Dann gilt: Ist $a^* \in \mathbb{A}$ Bayes-Aktion bezüglich π, so ist a^* auch zulässig.

Proposition 2.60

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$. Ist $a \in \mathbb{A}$ eine zulässige Bayes-Aktion, so ist a auch zulässig im Problem $(\mathcal{M}(\mathbb{A}), \Theta, \tilde{u}(\cdot))$.

Neu ist hier die Aussage für $\pi(\{\vartheta_j\}) = 0$ für manche j. Für $\pi(\{\vartheta_j\}) > 0$ folgt die Aussage bereits aus Korollar 2.57 und Satz 2.58; nach dem Korollar ist a auch Bayes-Aktion in der gemischten Erweiterung, auf die dann Satz 2.58 angewendet werden kann.

Sind umgekehrt zulässige Aktionen auch Bayes-Aktionen?

Satz 2.61 (Ein Complete Class Theorem)

Betrachtet werde ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$, wobei $\mathbb{A} = \mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$ für eine geeignete Aktionenmenge $\mathbb{A}_0$. Dann gilt: Zu jeder zulässigen Aktion a gibt es eine Priori Verteilung $\pi^a(\cdot)$, so dass a Bayes-Aktion zur Bewertung $\pi^a(\cdot)$ ist.

c) Bayes und Minimax

Proposition 2.62

Eine Äquilisator-Aktion, die zugleich Bayes-Aktion ist, ist auch Maximin-Aktion.

2.4 Einige alternative Regeln im Kontext der klassischen Entscheidungstheorie

2.4.1 Die Laplace Regel

Foto:
http://www.mathematik.de/ger/information/landkarte/gebiete/
wahrscheinlichkeitstheorie/wahrscheinlichkeitstheorie.html
[Stand: 25.06.13]

Def. 2.63 (Laplace-Regel)

Gegeben sei das datenfreie Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ mit endlichem $\Theta = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m\}$. Die Kriteriumsfunktionen

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}: \quad \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \sum_{j=1}^{m} u(a, \vartheta_j) \end{aligned} \tag{2.7}$$

und

$$\begin{aligned} \Phi: \quad \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} u(a, \vartheta_j) \end{aligned} \tag{2.8}$$

heißen *Laplace-Regel*.

Bem. 2.64

Die beiden Kriteriumsfunktionen (2.7) und (2.8) liefern dieselbe Ordnung auf der Aktionenmenge.

a) Die Kriteriumsfunktion (2.8) entspricht einer Bayes-Regel mit Priori-Verteilung $\pi(\cdot) = (\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m})$ (mit $m = |\Theta|$), also einer Gleichverteilung auf Θ.
Damit geometrisch: Höhenlinien senkrecht auf Equilisator-Linie.

b) Viele Eigenschaften der optimalen Aktion können deshalb aus den in Kapitel 2.3 formulierten Sätzen über Bayes-Regeln abgeleitet werden. (Zulässigkeit, Entbehrlichkeit randomisierter Aktionen,...)

c) Rechtfertigung durch „Prinzip vom unzureichenden Grund“ (Laplace): Wenn nichts dafür spricht, dass eines der Elementarereignisse wahrscheinlicher ist als die anderen, dann sind sie gleichwahrscheinlich, also

$$\pi(\{\vartheta_1\}) = \pi(\{\vartheta_2\}) = \ldots = \pi(\{\vartheta_m\}).$$

Da

$$\pi(\{\vartheta_1\}) + \pi(\{\vartheta_2\}) + \ldots + \pi(\{\vartheta_m\}) = 1\,,$$

ist zwangsläufig

$$\pi(\{\vartheta_j\}) = \frac{1}{m}\,, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

d) Verallgemeinerung auf unendliches Θ:
Theorie der nichtinformativen Priori-Verteilungen, siehe Bemerkung 2.66.

Bem. 2.65 (Beispiel und Kritik)

Abwandlung von Beispiel aus Kapitel 1.3.2, Lotterie
Urnen bestehend aus einer unbekannten Anzahl von grünen, blauen und restlichen (rote, schwarze, violette) Kugeln.
Man kann entweder

- a_1 nicht spielen,
- a_2 zum Preis von $c_g = 60$€ auf grün setzen oder
- a_3 zum Preis von $c_b = 90$€ auf blau setzen.

Es wird eine Kugel zufällig gezogen. Man erhält 240€, wenn die Kugel, auf die man gesetzt hat, gezogen wird.

	$\{g\}$	$\{b\}$	$\{\text{rest}\}$		
a_1	0	0	0	0	
a_2	180	-60	-60	20	$\leftarrow$ optimale Aktion
a_3	-90	150	-90	-10	

Bem. 2.66 („Nichtinformative“ Priori-Verteilung)

In der konditionalen Inferenz (vgl. Kapitel 5.1) gibt es verschiedene Versuche, ähnlich der Laplace-Regel, „nichtinformative“ Priori-Verteilungen zu definieren und diese dann als Standardbewertungen heranzuziehen.

- z.B. die Gleichverteilung, diese ist aber nicht invariant gegenüber Transformationen des Parameters. Man hat dann also „keine Information“ über ϑ, aber eine informative Priori z.B. über eine bijektive, nichtlineare Transformation von ϑ.

- z.B. Verteilungen, die invariant bezüglich bijektiver Transformationen des Parameters sind (Jeffrey-Regel).

- z.B. Verteilungen, die die Entropie maximieren (Jaynes-Regel)

- Ganz neue Möglichkeiten ergeben sich beim Übergang zu Credalmengen (siehe Kapitel 4).

2.4.2 Die Minimax-Regret-Regel von L.J. Savage, auch Niehans-Savage-Regel genannt

Def. 2.67 (Minimax-Regret-Aktion)

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ in Nutzenform bzw. $(\mathbb{A}, \Theta, l(\cdot))$ in Verlustform. Seien $\Theta = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m\}$ und $\mathbb{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Das Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, r(\cdot))$ in Verlustform mit

$$r : \mathbb{A} \times \Theta \to \mathbb{R} \quad , \quad (a_i, \vartheta_j) \mapsto r(a_i, \vartheta_j) \tag{2.9}$$

und

$$r(a_i, \vartheta_j) = \max_{\ell=1,\ldots,n} (u(a_\ell, \vartheta_j)) - u(a_i, \vartheta_j) \tag{2.10}$$

$$\text{bzw.} \qquad r(a_i, \vartheta_j) = l(a_i, \vartheta_j) - \min_{\ell=1,\ldots,n} (l(a_\ell, \vartheta_j)) \tag{2.11}$$

heißt **induziertes Regret Problem**. Jedes $a^* \in \mathbb{A}$ mit

$$\max_{j=1,\ldots,m} r(a^*, \vartheta_j) \leq \max_{j=1,\ldots,m} r(a, \vartheta_j) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{A}$$

heißt **Minimax-Regret-Aktion**.

Bsp. 2.68 (Beispiel und Kritik)

Proposition 2.69 (Bayes-Aktionen in Regrettafeln)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ bzw. $(\mathbb{A}, \Theta, l(\cdot))$ mit $\mathbb{A} < \infty$ und $|\Theta| < \infty$ und die Priori-Bewertung $\pi(\cdot)$. Eine Aktion a^* ist genau dann Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$, wenn a^* Bayes-Aktion zu $\pi(\cdot)$ im induzierten Regret-Problem ist.

2.4.3 Das Hurwicz-Kriterium

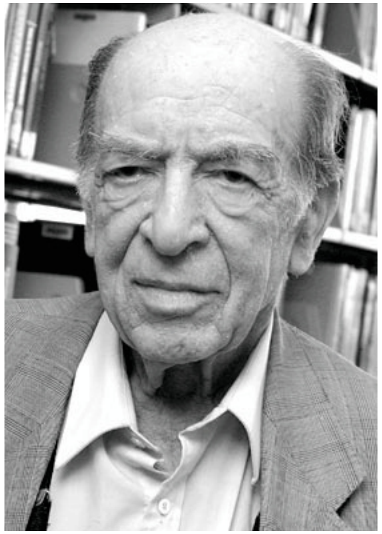

Foto: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/2007/hurwicz-facts.html
[Stand: 25.06.13]

Def. 2.70 (Hurwicz-Kriterium)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ mit $|\Theta| < \infty$, sowie $\alpha \in [0,1]$.

$$\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R} \quad , \quad a \mapsto \Phi(a)$$

mit

$$\Phi(a) = \alpha \max_j u(a, \vartheta_j) + (1-\alpha) \min_j u(a, \vartheta_j) \tag{2.12}$$

heißt *Hurwicz-Kriterium* zum *Optimismusparameter* α.

2.4.4 Das Erfahrungskriterium von J.L. Hodges und E.L. Lehmann (1952)

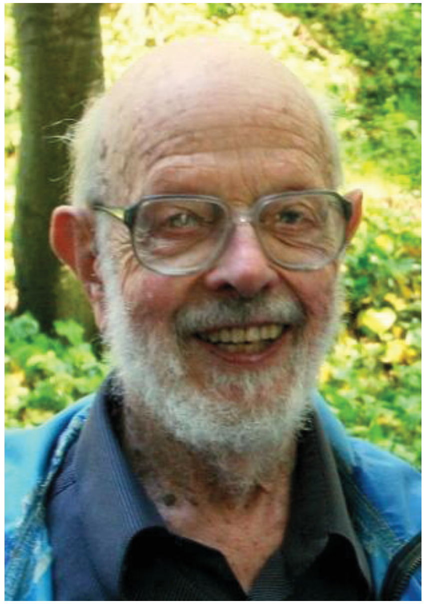

Foto:
http://senate.universityofcalifornia.edu/inmemoriam/erichlehmann.html
[Stand: 29.05.16]

Def. 2.71 (Erfahrungskriterium von Hodges & Lehmann)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$, $|\Theta| < \infty$, $\mu \in [0, 1]$ und eine Priori-Bewertung $\pi(\cdot)$.

$$\Phi : \mathbb{A} \to \mathbb{R} \quad , \quad a \mapsto \Phi(a)$$

mit

$$\Phi(a) = \mu \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} u(a, \vartheta_j) \pi(\{\vartheta_j\}) \right) + (1 - \mu) \cdot \left(\min_j (u(a, \vartheta_j)) \right) \quad (2.13)$$

heißt *Erfahrungskriterium von Hodges und Lehmann zum Vertrauensparameter* μ.