

3.2 Lineare Optimierung (Entscheidungen unter Sicherheit)

Betrachtet wird hier der Fall $|\Theta| = 1$ (bzw. die Situation $u(a, \vartheta)$ bzw. $l(a, \vartheta)$ konstant in $\vartheta \in \Theta$ für alle $a \in \mathbb{A}$). Da hier keine Unsicherheit über die Umweltzustände herrscht (bzw. der Nutzen konstant in den Umweltzuständen ist), muss man „nur“ noch diejenige(n) Aktion(en) suchen, die maximalen Nutzen liefert/liefern. Ein Problem dabei ist, dass bei den in der Praxis üblicherweise betrachteten Problemen $\mathbb{A}$ hoch dimensional ist und nur durch eine Vielzahl von Restriktionen „indirekt“ beschrieben wird. Die Aufgabe, das Maximum (Minimum) einer Funktion (hier des Nutzens) über einer bestimmten Menge (hier der Aktionenmenge) zu finden, ist ein sehr gängiges Problem, das in vielen Kontexten auftritt und deshalb eine wichtige Rolle in der numerischen Mathematik spielt (Optimierung unter Nebenbedingungen).

Wir werden im folgenden v. a. lineare Optimierungsprobleme betrachten.
Die entsprechenden Techniken und Resultate erlauben

- eine effiziente Lösung von Entscheidungsproblemen nicht nur unter Sicherheit

und bilden zudem

- eine wesentliche Grundlage zur mathematischen Behandlung von Entscheidungsproblemen unter Unsicherheit, wie sie in den folgenden Abschnitten betrachtet werden.

3.2.1 Grundlegendes: Lineare Optimierung

- *Optimierung*: Suche Extremstellen (Minimum, Maximum) einer Funktion $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, über einer Menge $D_2 \subseteq D_1$. Dabei
 - * wird jetzt $f(\cdot)$ meist als *Zielfunktion* bezeichnet, und
 - * D_2 ergibt sich über „*Restriktionen, Nebenbedingungen*“

- *lineare Optimierung, lineare Programmierung*:
sowohl $f(\cdot)$ als auch die D_2 beschreibende Nebenbedingungen sind *linear* in den Komponenten („Variablen“) $\vec{x} \in D_1$
- *endliche lineare Optimierung* (hier im folgenden vorausgesetzt)
 - * $D_1 \subseteq \mathbb{R}^m$; $m < \infty$: die Anzahl der Variablen ist endlich.
 - * die Anzahl der linearen Nebenbedingungen ist endlich. Damit ist D_2 eine polyedrische Menge bzw. meist ein konvexes Polyeder.

3.2.2 Typische Beispiele und Problemstellung

Bsp. 3.24 (Produktionsplanung)

Maximiere Gesamtgewinn aus verschiedenen Produkten unter Restriktionen an

- Produktmenge (Lagermenge, Transportmenge)
- Produktionskapazität
- Ressourcenmenge

bei als fest angenommenem Preis und unbegrenztem Absatz.

Vgl. etwa im Beispiel 3.11, wird in der Übung genau besprochen.

Bsp. 3.25 (Mischungsprobleme)

Minimiere Kosten bei Einsatz verschiedener Ressourcen unter Nebenbedingungen an einzelne Komponenten (z.B. verschiedene Düngemittel mit verschiedenen Anteilen mehrerer Nährstoffe)

Bsp. 3.26 (Investitionsplanung)

Minimiere laufende Investitionskosten unter Bedingungen an
Fertigungskapazität und Investitionsbudget.

Bsp. 3.27 (Transportoptimierung und Zuordnungsprobleme)

- Verteile Einheiten kostenoptimal unter Restriktionen an Einsatzbereiche (z.B. minimiere Fahrzeiten einer Menge von Notarztwägen an verschiedenen Orten unter der Bedingung, dass alle Einsatzorte bedient werden)
- verteile Servicekräfte auf verschiedene zu bedienende Bereiche optimal hinsichtlich der benötigten Einarbeitungszeit

Diese Fragestellungen führen meist explizit auf ganzzahlige Probleme, diese werden hier nur am Rande betrachtet

3.2.3 Standard-Probleme der linearen Optimierung und ihre Lösung

Da lineare Optimierung später auf verschiedene Art verwendet wird, werden hier die Grundkonzepte allgemein besprochen. Zu maximieren/minimieren ist eine lineare Funktion $c^T w$ bei gegebenem c (z.B. Preise/Kosten) in der Variablen w über einem konvexen Polyeder der Form $R \cdot w \geq b$ bzw. $R \cdot w \leq b$, also z.B. der Ationenmenge $\mathbb{A}$.

Def. 3.28 (Standard-Minimum-Problem und Standard-Maximum Problem)

Ein Optimierungsproblem der Form

$$\begin{matrix} c^T \cdot w \\ (1 \times n)(n \times 1) \end{matrix} \rightarrow \min_w \quad (3.3)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \begin{matrix} R \cdot w \\ (m \times n)(n \times 1) \end{matrix} &\geq \begin{matrix} b \\ (m \times 1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} w \\ (n \times 1) \end{matrix} &\geq \begin{matrix} 0 \\ (n \times 1) \end{matrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

heißt *Standard-Minimum-Problem*² (in der Variablen $w = (w[1], \dots, w[n])^T \in (\mathbb{R}_0^+)^n$ mit der Zielfunktion $c^T \cdot w$). Jedes die Restriktionen (3.4) erfüllendes $\bar{w}$ mit $c^T \cdot \bar{w} > -\infty$ heißt *zulässig*³ oder *zulässige Lösung (des Standard-Minimum-Problems)*.

Eine zulässige Lösung w^* heißt *Optimallösung*⁴ des Standard-Minimum-Problems, wenn für jedes zulässige $\bar{w}$ gilt: $c^T \cdot \bar{w} \geq c^T \cdot w^*$.

²Die in der Literatur verwendeten Bezeichnungen sind sehr heterogen. Gleiche Begriffe können bei unterschiedlichen Autoren durchaus Verschiedenes bedeuten; dies gilt insbesondere für die Termini „Standard-Form“ und „kanonische Form.“

³Vorsicht: Leider wird hier, wie in der Literatur üblich, der Begriff Zulässigkeit in einem doppelten Sinne gebraucht. Zulässigkeit von Aktionen als nicht strikte Dominiertheit und Zulässigkeit als Verträglichkeit mit den Nebenbedingungen. Im Entscheidungsproblem unter Unsicherheit ist dabei eine zulässige Aktion im ersten Sinne bereits eine Optimallösung (Dominanz und Optimalität fallen bei $|\Theta| = 1$ zusammen); ansonsten sind aber Verwechslungen wohl ausgeschlossen.

⁴Man beachte, daß hier nur von Zulässigkeit und Optimalität gesprochen wird, wenn der zugehörige Wert $c^T \cdot w$ endlich ist.

Analog heißt ein Optimierungsproblem *Standard-Maximum-Problem* (in der Variablen $w = (w[1], \dots, w[n])^T \in (\mathbb{R}_0^+)^n$ mit der Zielfunktion $c^T \cdot w$), wenn es folgende Gestalt besitzt:

$$\begin{array}{c} c^T \cdot w \\ (1 \times n)(n \times 1) \end{array} \rightarrow \max_w \quad (3.5)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{c} R \cdot w \\ (m \times n)(n \times 1) \end{array} \leq \begin{array}{c} b \\ (m \times 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} w \\ (n \times 1) \end{array} \geq \begin{array}{c} 0 \\ (n \times 1) \end{array}. \quad (3.6)$$

Jedes die Restriktionen (3.6) erfüllende $\bar{w}$ mit $c^T \cdot \bar{w} < \infty$ heißt *zulässig* oder *zulässige Lösung* (des Standard-Maximum-Problems).

Eine zulässige Lösung w^* heißt *Optimallösung* des Standard-Maximum-Problems, wenn für jedes zulässige $\bar{w}$ gilt: $c^T \cdot \bar{w} \leq c^T \cdot w^*$.

Dabei wurde von folgenden *Konventionen* Gebrauch gemacht:

1. Bei einem Vektor $y \in \mathbb{R}^q$ bezeichnet $y[\ell]$ für jedes $\ell \in \{1, \dots, q\}$ die ℓ -te Komponente von y .
2. Für zwei Vektoren $y \in \mathbb{R}^q$ und $z \in \mathbb{R}^q$ sind die Relationen „ $\leq$ “, „ $\geq$ “ und „ $=$ “ jeweils komponentenweise zu lesen. Beispielsweise gilt also:

$$y \leq z : \Longleftrightarrow y[\ell] \leq z[\ell], \quad \forall \ell \in \{1, \dots, q\}.$$

Bem. 3.29 (Alle Probleme können auf die Standardformen gebracht werden.)

Jede lineare Optimierungsaufgabe läßt sich als ein Standard-Minimum-Problem und als ein Standard-Maximum-Problem formulieren:

- Durch Multiplizieren mit (-1) können Maximierungsprobleme in Minimierungsprobleme und Restriktionen der Form „ $\leq$ “ in Nebenbedingungen der Gestalt „ $\geq$ “ umgewandelt werden (und umgekehrt).
- Gleichheitsbedingungen in den Nebenbedingungen lassen sich in zwei Ungleichungen auflösen.

- Auch mit negativen Variablen kann umgegangen werden; man schreibt sie als Differenz zweier nichtnegativer Variablen.

Typischerweise bieten aus diesem Grund Programmpakete meist nur eine bestimmte Form an. $\square$

Proposition 3.30 (Zur Lösungsmenge linearer Programme)

Gegeben sei ein Standard-Minimum-Problem (bzw. ein Standard-Maximum-Problem) gemäß Definition 3.28. Dann gilt:

1. Ist die Menge aller zulässigen Lösungen nach unten bzw. nach oben beschränkt, so existiert genau dann eine Optimallösung w^* , wenn es ein zulässiges w_0 gibt.
2. Die Menge W^* aller Optimallösungen ist konvex und abgeschlossen. $\square$

Bem. 3.31 (Zur Lösung von Ungleichungen)

Man kann mit Hilfe der linearen Optimierung auch überprüfen, ob ein Ungleichungssystem

$$R \cdot w \leq b$$

eine Lösung hat.

Dazu ersetzt man eine Komponente von b (z.B. $b[1]$) durch eine weitere Variable z und untersucht, ob das Problem

$$z \longrightarrow \min_{w,z}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} r_{11} \cdot w[1] + r_{12} \cdot w[2] + \dots - z &\leq 0 \\ r_{12} \cdot w[2] + r_{22} \cdot w[2] + \dots &\leq b[2] \\ &\dots \end{aligned}$$

eine Lösung kleiner gleich $b[1]$ hat.

Alternativ kann man eine künstliche, beschränkte Zielfunktion einführen und das Problem

$$v \longrightarrow \max_{v,w}$$

unter den Nebenbedingungen

$$R \cdot w \leq b$$

$$v \leq 1$$

betrachten. Man erhält hier theoretisch sogar alle Lösungen.

Bem. 3.32 (Berechnung von Optimallösungen)

- Zur Lösung linearer Optimierungsprobleme steht eine Vielzahl von Algorithmen zur Verfügung. Das älteste und bekannteste Verfahren ist das so genannte *Simplex-Verfahren*, das auch in allen gängigen Programmpaketen implementiert ist.

Es benutzt – wie seine vielen Abwandlungen (und Weiterentwicklungen) – die Tatsache, dass gemäß Satz 3.18 einer der Extrempunkte zu einer Optimallösung führen muss, und sucht daher in „geschickter Weise“ die Extrempunkte ab.

Daneben gibt es noch eine Reihe von sehr effizienten „innere-Punkte-Methoden“ → Literatur.

- Bei zwei (oder drei) Variablen ist auch eine graphische Lösung möglich. Dies wird in der Übung behandelt.

3.2.4 Bestimmung optimaler Aktionen mittels linearer Optimierung

Bem. 3.33 (Allgemeines Vorgehen)

Ist $\mathfrak{A} = (\mathbb{A}, \Theta, u)$ ein Entscheidungsproblem mit $|\mathbb{A}| = n$ und $|\Theta| = m$, so kann jede randomisierte Aktion $\lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{A})$ eindeutig mit einem Punkt des Einheitssimplexes Δ_{n-1} identifiziert werden.

Jede Entscheidungsregel $\Phi : \mathcal{M}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ kann folglich auch als Funktion $\tilde{\Phi} : \Delta_{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ aufgefasst werden; optimale randomisierte Aktionen bzgl. Φ ergeben sich dann als Lösungen des Optimierungsproblems

$$\tilde{\Phi}(p) \longrightarrow \max_p$$

unter der Nebenbedingung $p \in \Delta_{n-1}$. Da Δ_{n-1} ein konvexes Polyeder ist, sind die Nebenbedingungen also als endliche Menge linearer Ungleichungen darstellbar. Jedoch ist i.A. die Kriteriumsfunktion $\tilde{\Phi}$ nicht linear in p und somit ist obiges Problem i.A. kein Standard-Maximum-Problem.

Häufig lässt sich das Problem durch geschicktes Umformen äquivalent als Standard-Maximum-Problem darstellen.

Bsp. 3.34 (Bestimmung von Bayes-Aktionen)

Bsp. 3.35 (Bestimmung von Maximin-Aktionen)

Betrachte erneut die Situation von (3.33). Die randomisierte Aktion $\lambda^* = (\lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n))$ ist Maximin-Lösung genau dann, wenn sie Optimallösung des folgenden Optimierungsproblems ist:

$$M_1 - M_2 \longrightarrow \max_{M_1, M_2, \lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n)}$$

unter den Nebenbedingungen

- $\lambda(a_1), \dots, \lambda(a_n), M_1, M_2 \geq 0$
- $\sum_{i=1}^n u(a_i, \vartheta_j) \lambda(a_i) \geq M_1 - M_2 \quad \text{für alle } j=1, \dots, m,$
- $\sum_{i=1}^n \lambda(a_i) = 1$