3 Technische Ergänzungen zur Entscheidungstheorie

3.1 Konvexität

3.1.1 Konvexe Mengen

Def. 3.1 (konvexe Mengen)

Seien $(\mathbb{V}, \oplus, \odot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{V}$. Sei weiter

$$\Delta_{n-1} := \left\{ \lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \ 0 \leq \lambda_\ell \leq 1 \ \wedge \ \sum\nolimits_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell = 1 \right\}$$

der $(n-1)$-dimensionale *Einheitssimplex*.

a) Für $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \Delta_{n-1}$ heißt

$$z := \lambda_1 \odot z_1 \oplus \lambda_2 \odot z_2 \oplus \ldots \oplus \lambda_n \odot z_n \tag{3.1}$$

Konvexkombination von $z_1, \ldots, z_n$.

b) Für $x, y \in \mathbb{V}$ heißt die Menge

$$[x, y] := \{\lambda \odot x \oplus (1-\lambda) \odot y | 0 \leq \lambda \leq 1\} \tag{3.2}$$

die *Verbindungsstrecke* zwischen x und y.

c) Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{V}$ heißt *konvex*, wenn für alle $z_1, z_2 \in \mathcal{M}$ gilt:

$$z_1 \in \mathcal{M}, z_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow [z_1, z_2] \subseteq \mathcal{M}\,.$$

Bsp. 3.3 (Beispiele für konvexe Mengen)

Lemma 3.4 (Äquivalentes Kriterium)

$\mathcal{M}$ ist konvex im Sinne von Definition 3.1 genau dann, wenn gilt:

$$\forall q \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in \Delta_{q-1}, \forall z_1, ..., z_q \in \mathcal{M} \text{ gilt} : \bigoplus_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell \odot z_\ell \in \mathcal{M}$$

D.h. $\mathcal{M}$ ist konvex, wenn beliebige Konvexkombinationen von Elementen aus $\mathcal{M}$ selbst wieder in $\mathcal{M}$ enthalten sind.

Proposition 3.5 (Konvexität der Menge aller W'maße)

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $\mathcal{P}$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann ist $\mathcal{P}$ konvex im $\mathbb{R}$-Vektorraum $(\mathcal{F}, \oplus, \odot)$ aller Funktionen $F : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$.

Hierbei bezeichne $\oplus$ die komponentenweise Funktionsaddition und $\odot$ die komponentenweise Multiplikation von Funktionen mit reellen Skalaren.

Bem. 3.6

- Man beachte, dass im Allgemeinen $\mathcal{P}$ nicht durch eine Standardklasse von Verteilungen ersetzt werden kann. Zum Beispiel ist die Menge aller Normalverteilungen *nicht* konvex. Dies mag zunächst enttäuschen, gewährt aber andererseits große Flexibilität in der Modellierung, da man durch Mischen eben sehr komplexe Formen erzeugen kann.

- Aus Proposition 3.5 folgt direkt, dass die Menge $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ aller randomisierten Aktionen eines Entscheidungsproblems ebenfalls konvex ist. Dies wird sich in diesem Kapitel noch als sehr nützlich erweisen.

3.1.2 Konvexe Hülle, konvexe Polyeder

Def. 3.7 (Konvexe Hülle)

Sei $\mathcal{M}$ eine beliebige Teilmenge eines $\mathbb{R}$-Vektorraums $(\mathbb{V}, \oplus, \odot)$.

a) Der Schnitt aller konvexen Obermengen von $\mathcal{M}$ heißt *konvexe Hülle*. Wir schreiben $\operatorname{conv}(\mathcal{M})$.

b) Ist $\mathcal{M}$ endlich, so heißt $\operatorname{conv}(\mathcal{M})$ auch *konvexes Polyeder (Polytop)*.

Bem. 3.8

- Die konvexe Hülle einer Menge ist konvex.
- Polyedrische Menge: Schnitt endlich vieler „Halbräume"˙
  Konvexes Polyeder : beschränkte polyedrische Menge

- Der Begriff „konvexes Polyeder" wird in der Literatur nicht ganz einheitlich gebraucht. Gelegentlich werden alle Mengen, die sich als Schnitt endlich vieler Halbräume darstellen lassen als konvexe Polyeder bezeichnet.Die Vorlesung folgt der Konvention, solche Mengen als <u>polyedrische Mengen</u> zu bezeichnen. Man kann zeigen, dass ein Polyeder im Sinne der Vorlesung dann genau eine polyedrische Menge ist, die zusätzlich beschränkt ist. Im $\mathbb{R}^k$ werden die die Halbräume begrenzenden Hyperebenen als <u>Begrenzungslinien</u> bezeichnet.

Proposition 3.9 (Charakterisierung der konvexen Hülle)

Die konvexe Hülle $\operatorname{conv}(\mathcal{M})$ ist die Menge aller Konvex-Kombinationen von Punkten aus $\mathcal{M}$, formal:

$$\operatorname{conv}(\mathcal{M}) = \left\{ \bigoplus_{\ell=1}^{q} \lambda_\ell \odot z_\ell \,\middle|\, q \in \mathbb{N}, \lambda \in \Delta_{q-1},\ z_\ell \in \mathcal{M}, \ell = 1, \ldots, q \right\}$$

Bsp. 3.11 (nach Büning / Naeve / Trenkler / Waldmann) *(2000, p. 327f, 333f)*

Dieses Beispiel ist typisch für die Produktionsplanung (vgl. Beispiel in Abschnitt 1.3.6); es wird in Kapitel 3.2 immer wieder verwendet.

Ein Unternehmer stelle die Produkte P_1 und P_2 her. Die dazu benötigten Mittel sind wie folgt beschränkt:

Maschine:	maximal 1200h
Rohstoffe:	maximal 3000 Mengeneinheiten (ME)
Arbeitskraft:	maximal 125h

und verteilen sich wie folgt auf je eine Mengeneinheit des Produkts $P_\ell, \ell = 1, 2$

	P_1	P_2
Maschine	3h	2h
Rohstoff	5ME	10ME
Arbeitskraft	0h	0.5h

a) Beschreiben Sie die Menge aller möglichen Produktionsmengen P_1 und P_2, die mit den vorgegebenen Beschränkungen verträglich sind!

b) Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis graphisch!

c) Welche Produktionsmengen nützen die vorhandenen Produktionsfaktoren so weit wie möglich aus?

3.1.3 Extremalpunkte

Def. 3.12 (Extremalpunkte)

Sei $\mathcal{M}$ eine konvexe Teilmenge eines $\mathbb{R}$-Vektorraums $(\mathbb{V}, \oplus, \odot)$.

a) Ein $z \in \mathcal{M}$ heißt *Extremalpunkt von* $\mathcal{M}$ genau dann, wenn es *nicht möglich* ist, z als konvexe Linearkombination

$$\lambda \odot x \oplus (1-\lambda) \odot y = z \text{ mit } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ und } x, y \in \mathcal{M} \backslash \{z\}$$

darzustellen.

b) Die Menge der Extremalpunkte werde mit $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ bezeichnet.

c) Die Extremalpunkte eines *konvexen Polyeders* heißen *Eckpunkte* .

Bem. 3.14 (Geometrische Charakterisierung von Eckpunkten)

Man kann zeigen: Die Eckpunkte eines konvexen Polyeders $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^k$ sind alle Punkte, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

i) x ist ein Schnittpunkt von (mindestens) k Begrenzungslinien.

ii) $x \in \mathcal{M}$.

Bsp. 3.16 (Eckpunkte)

Man betrachte Beispiel 3.11 und bestimme die Menge der Eckpunkte der Menge $\mathbb{A}$ aller möglichen Produktionsmengen.

Satz 3.18 (Extremalpunkte)

a) Sei $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, nichtleer, abgeschlossen und beschränkt.
Dann gilt:

a1) $\mathcal{E}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$

a2) Jede lineare Funktion $f : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum und ihr Minimum auf $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ an.

b) Ein konvexer Polyeder ist die konvexe Hülle seiner Extremalpunkte.

Bem. 3.19 (zu a2))

- Der Punkt a2) ist von immenser praktischer Bedeutung; insbesondere bildet er die Grundlage der linearen Optimierung (siehe später), also des Optimierens linearer Funktionen unter linearen Nebenbedingungen. Er führt das Auswerten der Funktion über einer unendlichen Menge auf das Auswerten von endlich vielen Punkten zurück.

- Für die Statistik ist a2) auch deshalb interessant, da der Erwartungswert eine lineare Funktion (bzw. ein lineares Funktional) in den zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

3.1.4 Randomisierte Aktionen und Konvexität

Satz 3.20 (randomisierte Aktionen als konvexe Hülle)

Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{A}, \Theta, u)$ ein endliches datenfreies Entscheidungsproblem, wobei gelte $\Theta := \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m\}$ und $\mathbb{A} := \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Für eine randomisierte Aktion $\lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{A})$, definiere

$$\tilde{u}(\lambda, \Theta) := (\tilde{u}(\lambda, \vartheta_1), \ldots, \tilde{u}(\lambda, \vartheta_m)) \in \mathbb{R}^m$$

als den mit ihr assoziierten Nutzenvektor. Notiere weiter mit

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{A}} := \{\tilde{u}(\lambda, \Theta) : \lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{A})\}$$

als die Menge aller solcher Vektoren. Dann gilt:

i) $\mathcal{M}(\mathbb{A}) = \mathrm{conv}(\{\delta_{a_1}, \ldots, \delta_{a_n}\})$
ii) $\mathcal{N}_{\mathfrak{A}} = \mathrm{conv}(\{\tilde{u}(\delta_{a_1}, \Theta), \ldots, \tilde{u}(\delta_{a_n}, \Theta)\})$

Insbesondere ist also $\mathcal{N}_{\mathfrak{A}}$ ein konvexes Polyeder.

Bem. 3.21 (Geometrische Deutung randomisierter Aktionen)