

3.2.5 Dualität der linearen Optimierung I

Jedem linearen Programm in Standardform kann ein sogenanntes *duales Programm* zugeordnet werden. Es entsteht dadurch, daß man von einem Minimierungsproblem zu einem Maximierungsproblem (und umgekehrt) übergeht und dabei für jede Restriktion des ursprünglichen Problems eine neue Variable einführt. Als neue Koeffizientenmatrix der Restriktionen dient die Transponierte der ursprünglichen Koeffizientenmatrix. Ferner sind auch die Rollen von c und b zu vertauschen; c wird zum Spaltenvektor der Restriktionen, während nun b zu einem Faktor des die Zielfunktion bestimmenden Skalarprodukts wird.

Def. 3.36 Duale Standard-Minimum- und Standard-Maximum-Probleme

Gegeben sei das Standard-Minimum-Problem in der Variablen w aus Definition 3.28. Dann heißt die Optimierungsaufgabe

$$\begin{matrix} b^T \cdot u \\ (1 \times m)(m \times 1) \end{matrix} \rightarrow \max_u \quad (3.7)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \begin{matrix} R^T \cdot u \\ (n \times m)(m \times 1) \end{matrix} &\leq \begin{matrix} c \\ (n \times 1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} u \\ (m \times 1) \end{matrix} &\geq \begin{matrix} 0 \\ (m \times 1) \end{matrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

das *zugehörige duale Standard-Maximum-Problem*. In diesem Zusammenhang wird dann das ursprüngliche Problem als *primales Standard-Minimum-Problem* bezeichnet.

Analog wird bei gegebenem Standard-Maximum-Problem in der Variablen w die Optimierungsaufgabe

$$\underset{(1 \times m)(m \times 1)}{b^T \cdot u} \rightarrow \min_u \quad (3.9)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl} R^T \cdot u & \geq & c \\ (n \times m)(m \times 1) & & (n \times 1) \\ u & \geq & 0 \\ (m \times 1) & & (m \times 1) \end{array} \quad (3.10)$$

als *zugehöriges duales Standard-Minimum-Problem* bezeichnet. Das ursprüngliche Problem heißt dann *primales Standard-Maximum-Problem*. $\square$

Der Zusammenhang zwischen Primalprogramm und Dualprogramm geht über die oben beschriebene, äußere Komplementarität weit hinaus:

Proposition 3.37 Zur Beziehung zwischen Primal-Problem und Dual-Problem

Gegeben sei das Standard-Minimum-Problem (3.3f.) in der Variablen w und das zugehörige duale Standard-Maximum-Problem (3.7f.) in der Variablen u . Dann gilt:

1. Das duale Standard-Minimum-Problem zu (3.7f.) ist wieder das ursprüngliche Standard-Minimum-Problem (3.3f.).
2. Ist $\tilde{w}$ eine zulässige Lösung eines Standard-Minimum-Problems und $\tilde{u}$ eine zulässige Lösung des zugehörigen dualen Standard-Maximum-Problems, so gilt

$$c^T \cdot \tilde{w} \geq b^T \cdot \tilde{u} .$$

$\tilde{w}$ und $\tilde{u}$ sind genau dann Optimallösungen, wenn in dieser Beziehung Gleichheit herrscht.

3. Das primale Standard-Minimum-Problem besitzt genau dann eine Optimallösung w^* , wenn für das duale Standard-Maximum-Problem eine Optimallösung u^* existiert. Gemäß oben sind dann beide Kriteriumswerte $c^T \cdot w^*$ und $b^T \cdot u^*$ gleich. $\square$

Bsp. 3.38 (Zur Dualität im Bsp. 3.11)

Bem. 3.39

Die Optimallösung $(u^*[1], \dots, u^*[m])^T$ des dualen Standard-Minimum-Problems besitzen auch eine inhaltliche Interpretation. Ihre Komponenten werden als *Schattenpreise* oder *Opportunitätskosten* bezeichnet und geben an, um wie viel sich der Zielfunktionswert ändert, wenn sich die zugehörige Restriktion im primalen Programm um eine Einheit erhöht, sofern diese Änderung als klein angesehen werden kann, so dass die Restriktionen nicht „grob“ verletzt werden. Man erhält also sozusagen den Betrag, den man maximal bereit wäre, für eine Erweiterung der Restriktion um eine Einheit zu zahlen.

Bsp. 3.40 (Schattenpreise im Bsp. 3.11)

(Fortsetzung von Bsp. ??)

3.2.6 Kanonische Form, Schlupfvariablen

In gewisser Weise ausgezeichnet sind spezielle Standard-Minimum-Probleme und Standard-Maximum-Probleme, bei denen alle Restriktionen in Gestalt von Gleichungen vorliegen. Dies lässt sich stets dadurch erreichen, dass man wie in Definition 3.41 in jeder Nebenbedingung eine nichtnegative Hilfsvariable („*Schlupfvariable*“) subtrahiert bzw. hinzuaddiert, die die Differenz zwischen beiden Seiten der Ungleichungen „auffängt“. In die Zielfunktion gehen Schlupfvariablen nicht mit ein. Wichtig ist es, auf ihre Nichtnegativität zu achten, da sonst die ursprünglichen Restriktionen nicht mehr erfüllt sein müssen.

Def. 3.41 (Kanonische Form)

Gegeben sei das Standard-Minimum-Problem (3.3f.) in der Variablen w .
Das Optimierungsproblem

$$c^T \cdot w \rightarrow \min_w \quad (3.11)$$

unter den Nebenbedingungen⁵

$$[R \ , \ -I_m] \cdot \begin{bmatrix} w \\ w_s \end{bmatrix} = b \quad (3.12)$$

$$\begin{matrix} w \\ (n \times 1) \end{matrix} \geq \begin{matrix} 0 \\ (n \times 1) \end{matrix} \quad (3.13)$$

$$\begin{matrix} w_s \\ (m \times 1) \end{matrix} \geq \begin{matrix} 0 \\ (m \times 1) \end{matrix} \quad (3.14)$$

⁵Dabei bezeichnet I_m für jedes $m \in \mathbb{N}$ die m -dimensionale Einheitsmatrix.

heißt *(zugehöriges) Standard-Minimum-Problem in kanonischer Form (in der (Haupt)Variablen w mit der Schlupfvariablen $w_s = (w_s[1], \dots, w_s[m])^T$).*

Analog heißt für das Standard-Maximum-Problem (3.5f.) in der Variablen w das Optimierungsproblem

$$c^T \cdot w \rightarrow \max_w \quad (3.15)$$

unter den Nebenbedingungen

$$[R, I_m] \cdot \begin{bmatrix} w \\ w_s \end{bmatrix} = b \quad (3.16)$$

$$\begin{matrix} w \\ (n \times 1) \end{matrix} \geq \begin{matrix} 0 \\ (n \times 1) \end{matrix} \quad (3.17)$$

$$\begin{matrix} w_s \\ (m \times 1) \end{matrix} \geq \begin{matrix} 0 \\ (m \times 1) \end{matrix} \quad (3.18)$$

*(zugehöriges) Standard-Maximum-Problem in kanonischer Form
(in der (Haupt-)Variablen w mit der Schlupfvariablen $w_s =$
 $(w_s[1], \dots, w_s[m])^T$). $\square$*

Bsp. 3.42 Standard-Maximum Problem in kanonischer Form im Beispiel 3.11

Man bestimme das Standard-Maximum-Problem in der kanonischen Form.

Offensichtlich besteht folgender Zusammenhang zwischen den Lösungen eines Standard-Minimum- bzw. eines Standard-Maximum-Problems und den Lösungen des zugehörigen Problems in kanonischer Form:

Bem. 3.43 (Lösungen bei kanonischer Form und ursprünglicher Form)

Betrachtet man ein Standard-Minimum-Problem gemäß (3.3f.) bzw. ein Standard-Maximum-Problem laut (3.5f.) sowie die in (3.11ff.) und (3.15ff.) beschriebenen zugehörigen Standard-Minimum-Probleme bzw. Standard-Maximum-Probleme in kanonischer Form. Dann gilt:

1. Ist $(\bar{w}[1], \dots, \bar{w}[n], \bar{w}_s[1], \dots, \bar{w}_s[m])^T$ zulässig (resp. eine Optimallösung) für das Problem in kanonischer Form gemäß (3.11ff.) bzw. (3.15ff.), so ist $(\bar{w}[1], \dots, \bar{w}[n])^T$ zulässig (resp. eine Optimallösung) für das entsprechende Problem (3.3f.) bzw. (3.5f.).

2. Umgekehrt gibt es zu jeder zulässigen (resp. optimalen) Lösung $(\bar{w}[1], \dots, \bar{w}[n])^T$ des Problems (3.3f.) bzw. (3.5f.) eine zulässige (resp. optimale) Lösung $(\bar{w}[1], \dots, \bar{w}[n], \bar{w}_s[1], \dots, \bar{w}_s[m])^T$ des zugehörigen Problems in kanonischer Form laut (3.11ff.) bzw. (3.15ff.). $\square$

Der praktische Nutzen der Verwendung von Schlupfvariablen liegt darin, dass man durch sie erkennen kann, bei welchen Restriktionen noch „Spiel ist“, d.h. welche Kapazitätsbeschränkungen nicht zur Gänze ausgeschöpft werden.

3.2.7 Dualität II: Der Satz vom komplementären Schlupf

Vom theoretischen wie praktischen Blickwinkel ist der Satz vom komplementären Schlupf (s.u.) von großer Bedeutung. Wendet man zu seiner Vorbereitung die Dualitätsbetrachtungen aus Definition 3.36 auf Standard-Minimum- bzw. Standard-Maximum-Probleme in kanonischer Form an, so erhält man:

Bem. 3.44 Duale Programme bei Programmen in kanonischer Form

Ist ein Standard-Minimum-Problem in kanonischer Form der in (3.11ff.) beschriebenen Gestalt gegeben, so lautet das zugehörige duale Standard-Maximum-Problem in kanonischer Form:

$$b^T \cdot u \rightarrow \max_u \quad (3.19)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{bmatrix} R^T & I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ u_r \end{bmatrix} = c \quad (3.20)$$

$$\begin{matrix} u \\ (m \times 1) \end{matrix} \geq \begin{matrix} 0 \\ (m \times 1) \end{matrix} \quad (3.21)$$

$$\begin{matrix} u_r \\ (n \times 1) \end{matrix} \geq \begin{matrix} 0 \\ (n \times 1) \end{matrix} . \quad (3.22)$$

Entsprechend lautet das zu einem Standard-Maximum-Problem in kanonischer Form (vgl. 3.15ff.) gehörende duale Standard-Minimum-Problem in kanonischer Form:

$$b^T \cdot u \rightarrow \min \quad (3.23)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{bmatrix} R^T & -I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ u_r \end{bmatrix} = c \quad (3.24)$$

$$\begin{matrix} u \\ (m \times 1) \end{matrix} \geq \begin{matrix} 0 \\ (m \times 1) \end{matrix} \quad (3.25)$$

$$\begin{matrix} u_r \\ (n \times 1) \end{matrix} \geq \begin{matrix} 0 \\ (n \times 1) \end{matrix} . \quad (3.26)$$

□

Natürlich behalten die Dualitätsergebnisse aus Proposition 3.37 ihre Gültigkeit. Darüber hinaus lässt sich jedoch ein fundamentaler Zusammenhang zwischen den Optimallösungen eines Problems und den Schlupfvariablen des zugehörigen dualen Problems herleiten. Es kann nämlich aus der Existenz von echt von Null verschiedenen Komponenten einer Optimallösung auf das Verschwinden der entsprechenden Haupt- bzw. Schlupfvariablen in *allen* Optimallösungen des zugehörigen Dual-Problems geschlossen werden. Auch ist es möglich, zulässige Lösungen aufgrund ihres Schlupfes unter Umständen als optimal zu charakterisieren:

Proposition 3.45 (Der Satz vom komplementären Schlupf)

Betrachtet werde ein Standard-Minimum-Problem bzw. ein Standard-Problem in kanonischer Form gemäß (3.11ff.) bzw. (3.15ff.) und das zugehörige duale Problem in kanonischer Form, wie in (3.19ff.) bzw. (3.23ff.) beschrieben. Dann gilt:

1. Ist $(\tilde{w}^T, \tilde{w}_s^T)^T$ eine zulässige Lösung des primalen Problems und $(\tilde{u}^T, \tilde{u}_r^T)^T$ eine zulässige Lösung des zugehörigen dualen Problems, so sind beide genau dann optimal, wenn gilt

$$\tilde{w}^T \cdot \tilde{u}_r + \tilde{w}_s^T \cdot \tilde{u} = 0 . \quad (3.27)$$

Korollar 3.46

In der Situation von Proposition 3.45 gilt für alle $j = 1, \dots, m$:

a) Gibt es eine Optimallösung

$$(w^*[1], \dots, w^*[n], w_s^*[1], \dots, w_s^*[m])^T$$

für das primale Problem mit

$$w_s^*[j] > 0 ,$$

so ist

$$u^*[j] = 0$$

für alle Optimallösungen

$$(u^*[1], \dots, u^*[m], u_r^*[1], \dots, u_r^*[n])^T$$

des zugehörigen Dualproblems.

b) Gibt es eine Optimallösung

$$(u^*[1], \dots, u^*[m], u_r^*[1], \dots, u_r^*[n])^T$$

des Dualproblems mit

$$u^*[j] > 0 ,$$

so ist

$$w_s^*[j] = 0$$

für alle Optimallösungen

$$(w^*[1], \dots, w^*[n], w_s^*[1], \dots, w_s^*[m])^T$$

des primalen Problems.

□

Bsp. 3.47 (Der Satz vom komplementären Schlupf im Beispiel 3.42)

Illustrieren Sie anhand von Bsp 3.11 den Satz vom komplementären Schlupf!

3.2.8 Erweiterungen

Es gibt eine Reihe wichtiger Erweiterungen:

- nichtlineare Zielfunktionen

Hier gibt es eine Vielzahl von leistungsfähigen Algorithmen. Ist die Zielfunktion der Quotient zweier linearer Funktionen, so lässt sich eine geeignete Verallgemeinerung von Satz 3.18 und damit auch des Simplex-Algorithmus finden („*Quotientenoptimierung*“).

Bei allgemeinen Zielfunktionen wird das Extremum nicht notwendig in einem Extrempunkt angenommen.

Betrachtet man beispielsweise (Varianz der Bernoulli-Verteilung)

$$\begin{aligned} p(1-p) &\rightarrow \max \\ p &\geq 0 \\ -p &\geq -1, \end{aligned}$$

so liegt die Optimallösung p^* bei $\frac{1}{2}$.

Dennoch lassen sich quadratische Optimierungsprobleme (wie z.B. das KQ-Kriterium unter Nebenbedingungen) mit einem Simplex-ähnlichen Verfahren lösen (etwa: Büning et. al., 2000, Kap. 8.9).

- *Parametrische Optimierung:*

Die Zielfunktion und/oder Restriktionen hängen von einem Parameter ab.

(Wichtig z.B. für Sensitivitätsanalysen) Auch hier sind Varianten z.B. des Simplex-Verfahren möglich.

- *Ganzzahlige Optimierung*

Sind die Lösungen inhaltlich zwingend ganzzahlig (z.B. die Aufteilung von wenigen unteilbaren Ressourcen), so ist eine eigenständige Betrachtung nötig.

Ein besonderer Spezialfall ist die *Boolesche Optimierung*, bei der nur 0, 1-Variablen zugelassen sind.

4 Entscheidungsprobleme unter einem allgemeineren Wahrscheinlichkeitsbegriff