**Aufgabe 1** (Lineare Optimierung)

Ein Unternehmer stelle die Produkte $P_1$ und $P_2$ her. Die dazu benötigten Mittel (Maschine, Rohstoffe, Arbeitskraft) sind wie folgt beschränkt:

- Maximale Maschinenlaufzeit: 1200 h
- Maximal verfügbare Rohstoffmenge: 3000 Mengeneinheiten (ME)
- Maximal verfügbare Arbeitszeit: 125 h

Die Mittel verteilen sich wie folgt auf je eine ME des Produkts $P_i$, $i = 1, 2$:

| | $P_1$ | $P_2$ |
|---|---|---|
| Maschine | 3 h | 2 h |
| Rohstoff | 5 ME | 10 ME |
| Arbeitskraft | 0 h | 0.5 h |

a) Beschreiben Sie die Menge $Z \subset \mathbb{R}^2$ aller Mengenaufteilungen auf $P_1$ und $P_2$, die mit den vorgegebenen Beschränkungen verträglich sind! Um welche Art von Menge handelt es sich bei $Z$?

b) Veranschaulichen Sie Ihr Ergebnis graphisch!

c) Welche Produktionsmengen (d.h. Elemente von $Z$) nutzen die vorhandenen Produktionsfaktoren so weit wie möglich aus? Was sind die Extremalpunkte von $Z$?

d) Formulieren Sie die Bestimmung einer optimalen Mengenaufteilung als Standard-Maximum-Problem. Nutzen Sie Resultate aus der Vorlesung zur Bestimmung einer Optimallösung $z^* \in Z$. Interpretieren Sie diese Lösung graphisch.

e) Bilden Sie das (zu d)) duale lineare Optimierungsproblem und bestimmen Sie auch hier eine Optimallösung.

   *Hinweis:* Es müssen hierzu *nicht* die Extremalpunkte des dualen Restriktionspolyeders bestimmt werden. Verwenden Sie stattdessen geeignete Resultate zur Dualität aus der Vorlesung.