2.3 Bayes-Entscheidungen in der 'virtuellen Risikosituation'

2.3.1 Entscheiden in der Risikosituation

Bsp. 2.39 (Beispiel: Lotterie vgl. Bsp. in Abschnitt 1.3.2)

Urne mit g (hier: 50) grünen, b (30) blauen und r (20) restlichen Kugeln. Man kann

a_1 nicht spielen
a_2 zum Preis von 20 auf Grün setzen
a_3 zum Preis von 10 auf Blau setzen

Nur einmaliger, zufälliger Zug aus der Urne, man erhält 100 Euro bei Treffer:

	grün	blau	rest	Min
a_1	0	0	0	0
a_2	80	-20	-20	-20
a_3	-10	90	-10	-10

Wie würden Sie sich entscheiden?

Def. 2.40 (Erwartungsnutzen)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ in Nutzenform. Für festes $a \in \mathbb{A}$ definieren wir die Abbildung

$$u(a) : \Theta \to \mathbb{R} \quad , \quad \vartheta \mapsto u(a, \vartheta)$$

Sei weiter

- $\sigma(\Theta)$ eine σ-Algebra über Θ, so dass die Abbildung $u(a)$ für alle $a \in \mathbb{A}$ $\sigma(\Theta)$-$\mathcal{B}$ messbar ist und $\sigma(\Theta)$ alle Einpunktmengen enthält und
- π ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Theta, \sigma(\Theta))$, so dass dass die Abbildung $u(a)$ für alle $a \in \mathbb{A}$ integrierbar bzgl. π ist.

Dann heißt für jedes $a \in \mathbb{A}$ der Ausdruck

$$\mathbb{E}_\pi(u(a)) := \int_\Theta u(a, \vartheta) \, \mathrm{d}\pi(\vartheta) \tag{2.4}$$

der *Erwartungsnutzen* der Aktion a bezüglich π.

- Zu (2.4) sei nochmals an die Definition des allgemeinen Maßintegral erinnert. Insbesondere gilt wiederum

  * π stetig mit Lebesgue-Dichte f, dann

$$\mathbb{E}_\pi(u(a)) = \int_\Theta u(a,\vartheta) f(\vartheta)\ \mathrm{d}\vartheta$$

  * π diskret mit Wahrscheinlichkeitsfunktion $(\pi(\{\vartheta\}))_{\vartheta\in\Theta}$

$$\mathbb{E}_\pi(u(a)) = \sum_{\vartheta\in\Theta} u(a,\vartheta)\pi(\{\vartheta\})$$

Bem. 2.41 (Annahmen für dieses Kapitel)

In diesem Kapitel wollen wir durchweg annehmen, dass Situationen betrachtet werden, für welche der Erwartungsnutzen für beliebige Aktionen existiert. Insbesondere für endliche Entscheidungsprobleme (d.h. $|\mathbb{A}| < \infty$ und $|\Theta| < \infty$) sind bei Verwendung von $\sigma(\Theta) := 2^{\Theta}$ alle für die Bildung des Erwartungsnutzens erforderlichen Bedingungen immer erfüllt.

Def. 2.42 (Bernoullikriterium)

In der Situation von Def. 2.40 wähle man

$$\begin{aligned} \Phi(\cdot, \pi) \,:\, & \mathbb{A} \to \mathbb{R} \\ & a \longmapsto \Phi(a, \pi) = \mathbb{E}_\pi(u(a)) \end{aligned}$$

als Kriteriumsfunktion!

Bem. 2.44

Gerade bei diesem Kriterium ist es absolut essentiell, sich daran zu erinnern, dass der Nutzen nicht notwendig linear in den Geldbeträgen ist.

Bem. 2.46 (Einbeziehen der Varianz)

Insbesondere bei wirtschaftlichen Anwendungen wird manchmal ergänzend die Varianz von $u(a, \cdot)$ (oder ein anderes Risikomaß) mit einbezogen; man spricht dann von (μ, σ)-Kriterien (μ Mittelwert, σ^2 Varianz).

Dies kann auf zwei Arten geschehen:

1) *Zweistufige* (μ, σ)*-Kriterien* (um zwischen Aktionen mit gleichen Erwartungswerten zu differenzieren), also etwa:

$$\widetilde{\Phi} : \mathbb{A} \to \begin{pmatrix} \mathbb{E}_\pi \; u(a) \\ \mathbb{V}_\pi \; u(a) \end{pmatrix}$$

im Sinne der lexikographischen Ordnung (bzgl. $\mathbb{V}$), also

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi}(a) &> \widetilde{\Phi}(a') \quad \Longleftrightarrow \\ \mathbb{E}_\pi(u(a)) &> \mathbb{E}_\pi(u(a')) \text{ oder} \\ \mathbb{E}_\pi(u(a)) &= \mathbb{E}_\pi(u(a')) \text{ und } \mathbb{V}_\pi(u(a)) < \mathbb{V}_\pi(u(a')) \end{aligned}$$

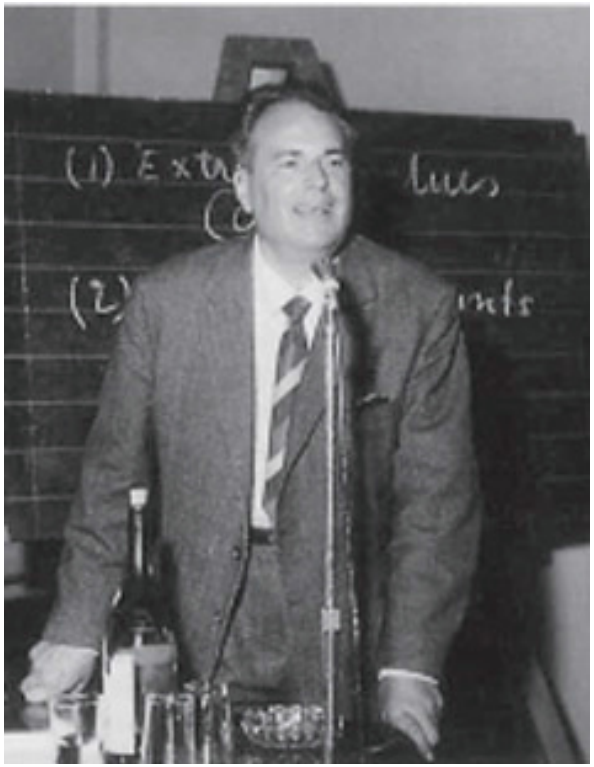
2) *einstufige* (μ, σ)*-Kriterien* mit der Kriteriumsfunktion

$$\Phi(a) = \mathbb{E}_\pi(u(a)) - c \cdot \sqrt{\mathbb{V}_\pi(u(a))}$$

$c > 0$ (üblich): risikoavers, eventuell aber auch $c < 0$: risikofreundlich (z.B. Glücksspiel).

2.3.2 Grundlagen der Bayesianischen Ansätze

Bruno de Finetti (jetzt auch: www.brunodefinetti.it):



Quelle: http://www.sipta.org/isipta11/index.php?id=finetti

Bem. 2.47 (Bayesianisches / Subjektivistisches Paradigma)

Jede Situation unter Unsicherheit kann durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ beschrieben werden.

Im Kontext eines Entscheidungsproblems heißt die Wahrscheinlichkeitsverteilung π über $(\Theta, \sigma(\Theta))$ die *a priori Verteilung* (Verteilung „vor den Daten“) zum Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$.

2.3.3 Bayes-Aktionen: Definition, Bestimmung und wichtige Eigenschaften

Def. 2.48 (Bayes-Aktion)

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$.

a) Ist π eine a priori Verteilung zu $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$, so heißt

$$\Phi(\cdot, \pi) : \mathbb{A} \to \mathbb{R} \quad , \quad a \mapsto \Phi(a, \pi) := \mathbb{E}_\pi(u(a)) = \int_\Theta u(a, \vartheta)\, d\pi(\vartheta)$$

Bayes-Kriterium zu π und jede bezüglich dieses Kriteriums optimale Aktion a^* *Bayes-Aktion bezüglich* π. Der Ausdruck

$$B(\pi) := \Phi(a^*, \pi)$$

heißt *Bayes Nutzen bezüglich* π

b) Eine Aktion a^{**} heißt *Bayes-Aktion (schlechthin)*, wenn es eine Priori-Bewertung π^{**} zu $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$ gibt, so dass a^{**} Bayes Aktion bezüglich π^{**} ist.

Bem. 2.49 (Einige Anmerkungen)

- Beachte: „Rein mathematisch“ besteht kein Unterschied zum Bernoullikriterium aus Def. 2.42; semantisch handelt es sich aber bei der Wahrscheinlichkeitsbewertung der Zustände um ein anderes Objekt, nämlich um eine subjektive Wahrscheinlichkeitsbewertung.

- Es ist einfach, Beispiele zu finden, bei denen alle Aktionen eines Entscheidungsproblems Bayes-Aktionen sein können. Vorwurf der Beliebigkeit.

Bem. 2.51 (Der Bayes-Nutzen randomisierter Aktionen)

Für randomisierte Aktionen $\tilde{a}$ ist unter schwachen Regularitätsbedingungen (Anwendbarkeit des Satzes von Fubini)

$$\begin{aligned}
\Phi(\tilde{a}, \pi) = \mathbb{E}_\pi(u(\tilde{a})) &= \int_\Theta u(\tilde{a}, \vartheta) d\pi(\vartheta) \\
&= \int_\Theta \left(\int_{\mathbb{A}_0} u(a, \vartheta) d\tilde{a}(a) \right) d\pi(\vartheta) \qquad (2.5) \\
&= \int_{\mathbb{A}_0} \left(\int_\Theta u(a, \vartheta) d\pi(\vartheta) \right) d\tilde{a}(a) \\
&= \int_{\mathbb{A}_0} \Phi\left(a, \pi\right) d\tilde{a}(a) \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Bei endlichem $\mathbb{A}_0$ und Θ gilt:

Hat $\widetilde{a}(\cdot)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion $(\widetilde{p}(a_i))_{i=1,\ldots,n}$ auf $\mathbb{A}_0$ und $\pi(\cdot)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion $(\pi(\{\vartheta_j\})_{j=1,\ldots,m}$ auf Θ, so gilt:

$$\begin{aligned}\Phi(\widetilde{a},\pi) &= \sum_{j=1}^{m} u(\widetilde{a},\vartheta_j)\cdot\pi(\{\vartheta_j\}) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} u(a_i,\vartheta_j)\cdot p(\{a_i\})\right)\pi(\{\vartheta_j\}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} u(a_i,\vartheta_j)\cdot\pi(\{\vartheta_j\})\right)p(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^{n}\Phi(a_i,\pi)\cdot p(\{a_i\})\end{aligned}$$

Bem. 2.55 (Graphische Bestimmung von Bayes-Aktionen)

2.3.4 Wichtige Sätze über Bayes-Aktionen

Im folgenden $|\Theta| < \infty$, also endliche Zustandsmengen. Viele Sätze gelten unter geeigneten Zusatzvorraussetzungen mutatis mutandis auch für unendliche Zustandsräume. ($\mathbb{A}$ nicht notwendig als endlich vorausgesetzt, da man ja auch $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ betrachten will.)

a) Entbehrlichkeit randomisierter Aktionen

Satz 2.56 (Entbehrlichkeit randomisierter Aktionen)

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem $(\mathcal{M}(\mathbb{A}_0), \Theta, \tilde{u}(\cdot))$, das die gemischte Erweiterung eines Entscheidungsproblems $(\mathbb{A}_0, \Theta, u(\cdot))$ mit endlicher Aktionenmenge $\mathbb{A}_0$ darstellt. Dann gilt für jede Priori-Verteilung π:

Ist $\widetilde{a}$ Bayes-Aktion zur Bewertung π, so gibt es auch eine reine Aktion $a \in \mathbb{A}_0$, die Bayes-Aktion zu π in $\mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$ ist.

Korollar 2.57

In der Situation von Satz 2.57 gilt für jede Priori-Verteilung $\pi(\cdot)$: Bayes-Aktionen zu $\pi(\cdot)$ in $\mathbb{A}_0$ bleiben Bayes-Aktionen zu $\pi(\cdot)$ beim Übergang zu $\mathcal{M}(\mathbb{A}_0)$.