2 Optimales Entscheiden unter Unsicherheit: Entscheidungskriterien

2.1 Entscheidungsregeln – Entscheidungsprinzipien; Zulässigkeit und Dominanzprinzip

2.1.1 Entscheidungsregeln – Entscheidungsprinzipien

Bem. 2.1 (Relevante Grundbegriffe der Ordnungstheorie)

Sei M eine beliebige nicht-leere Menge.

Dann heißt jede nicht-leere Teilmenge $R \subset M \times M$ eine (binäre) *Relation* auf M. Anstelle von $(a, b) \in R$ benutzen wir häufig die Notation aRb.

Sei nun $R \subset M \times M$ eine Relation auf M. Dann heißt R

i) *reflexiv*, falls $\forall a \in M : aRa$

ii) *irreflexiv*, falls $\forall a \in M : \neg aRa$

iii) *symmetrisch*, falls $\forall a, b \in M : aRb \Rightarrow bRa$

iv) *asymmetrisch*, falls $\forall a, b \in M : aRb \Rightarrow \neg bRa$

v) *transitiv*, falls $\forall a, b, c \in M : (aRb \wedge bRc) \Rightarrow aRc$

vi) *vollständig*, falls $\forall a, b \in M : (aRb \vee bRa)$

Wir nennen weiter $\sim \subset M \times M$ eine *Äquivalenzrelation* auf M, falls diese reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Ist $R \subset M \times M$ eine Relation und $\sim \subset M \times M$ eine Äquivalenzrelation, so nennen wir R

vii) *antisymmetrisch* bezüglich $\sim$, falls

$$\forall a, b \in M : (aRb \wedge bRa) \Rightarrow a \sim b$$

vii) *trichotom* bezüglich $\sim$, falls

$$\forall a, b \in M : (aRb \vee bRa \vee a \sim b)$$

Bem. 2.2 (Einige Beispiele bekannter Relationen)

1. Die Gleichheitsrelation $=$ definiert auf jeder beliebigen Mengen eine Äquivalenzrelation.

2. Die übliche *kleiner* Relation $<$ auf $\mathbb{R}$ ist irreflexiv, asymmetrisch, transitiv und bezüglich der Gleichheitsrelation $=$ trichotom.

3. Die übliche *kleinergleich* Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist reflexiv, transitiv, vollständig und bezüglich der Gleichheitsrelation $=$ antisymmetrisch.

4. Die *komponentenweise kleiner* Relation $<$ auf $\mathbb{R}^n$ ist irreflexiv, asymmetrisch, transitiv aber *nicht* trichotom.

5. Die *komponentenweise kleinergleich* Relation $\leq$ auf $\mathbb{R}^n$ ist reflexiv, transitiv und bezüglich der Gleichheitsrelation $=$ antisymmetrisch. Sie ist aber *nicht* vollständig.

Bem. 2.3 (Entscheidungsregeln und Entscheidungsprinzipien)

Im Kontext der Entscheidungstheorie, resultieren die folgenden Begriffsbildungen:

- *Entscheidungsregeln* induzieren eine vollständige und transitive Ordnung auf der Aktionenmenge $\mathbb{A}$.

  + Ist der Aktionenraum endlich, dann gibt es „größte“/ „beste“ Aktionen in $\mathbb{A}$ (nicht notwendigerweise eindeutig).

  – Allerdings: Für die konkrete Gestalt von Entscheidungsregeln gibt es i.a. keinen universellen Gültigkeitsanspruch. Später werden wir sogar sehen: Jede *beliebige* Funktion von $\mathbb{A}$ nach $\mathbb{R}$ ist eine Entscheidungsregel.

- *Entscheidungsprinzipien* sind Grundsätze für die Auswahl von Aktionen, die beanspruchen, allgemeine Rationalitätsprinzipien zu sein.

  + Der Rationalitätsanspruch eines Entscheidungsprinzips kann nicht sinnvoll in Zweifel gezogen werden.

  – Geringe Ordnungskraft: Man wird im Allgemeinen nur gewisse ungünstige Aktionen als „unzulässig“ ausschließen können, jedoch keine vollständige Ordnung erhalten (die Transitivität sollte hingegen gegeben sein).

- Später werden wir sehen: Entscheidungs*prinzipien* sind unabhängig vom Unsicherheitsverständnis (ob Typ I oder Typ II), die Entscheidungs*regeln* hingegen nicht.

2.1.2 Zulässigkeit und Dominanzprinzip

Man betrachte das folgende elementare Beispiel:

Bsp. 2.4

Wir betrachten die folgende Nutzentafel:

	ϑ_1	ϑ_2
a_1	7	3
a_2	6	5
a_3	6	5
a_4	4	4
a_5	1	6
a_6	2	5
a_7	6	4
a_8	6.5	3.5

Es genügt, die folgende reduzierte Tafel zu betrachten, ohne das Wesentliche des Entscheidungsproblems zu verlieren:

	ϑ_1	ϑ_2
a_1	7	3
$a_{2,3}$	6	5
a_5	1	6
a_8	6.5	3.5

Def. 2.5 (Dominanzrelationen)

Seien a_1, $a_2 \in \mathbb{A}$.

a) a_1 *dominiert* $a_2 \iff$

$$u(a_1, \vartheta) \geq u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta.$$

Man schreibt:

$$\boxed{a_1 \succeq a_2}$$

b) a_1 *dominiert* a_2 *strikt* $\iff$

$$u(a_1, \vartheta) \geq u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta.$$

und

$$u(a_1, \vartheta) > u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für mindestens ein } \vartheta \in \Theta.$$

Man schreibt:

$$\boxed{a_1 \succ a_2}$$

c) a_1 *dominiert* a_2 *stark* $\Longleftrightarrow$

$$u(a_1, \vartheta) > u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta$$

Man schreibt:

$$\boxed{a_1 \succ\succ a_2}$$

d) a_1, a_2 sind *äquivalent* $\Longleftrightarrow$

$$a_1 \succeq a_2 \quad \text{und} \quad a_2 \succeq a_1$$

Man schreibt:

$$\boxed{a_1 \sim a_2}$$

- Für äquivalente Aktionen gilt:

$$a_1 \sim a_2 \quad \Longleftrightarrow \quad u(a_1, \vartheta) = u(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta$$

- Gemäß der in Bem. 1.6 postulierten Äquivalenz von Nutzen- und Verlustsicht kehren sich bei Verlusttafeln die „Vorzeichen“ in Def. 2.5 a) bis c) einfach um, z.B.:

$$a_1 \succeq a_2 \quad \Longleftrightarrow \quad l(a_1, \vartheta) \leq l(a_2, \vartheta) \qquad \text{für alle } \vartheta \in \Theta$$

Bem. 2.6 (Eigenschaften der Dominanzrelationen)

Die Dominanzrelationen gelten i.A. nicht für beliebige Paare von Aktionen. Dennoch gelten für sie einige der zuvor definierten Eigenschaften, genauer:

i) Die Relation $\sim$ definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{A}$.

ii) Die Dominanzrelation $\succeq$ ist reflexiv, transitiv und antisymmetrisch bezüglich $\sim$. Sie ist jedoch i.A. nicht vollständig.

iii) Die strikte Dominanzrelation $\succ$ ist irreflexiv, transitiv und asymmetrisch. Sie ist jedoch i.A. nicht trichotom bezüglich $\sim$.

iv) Die starke Dominanzrelation $\succ\succ$ ist irreflexiv, transitiv und asymmetrisch. Sie ist jedoch i.A. nicht trichotom bezüglich $\sim$.

Def. 2.7 (Admissibilität von Aktionen)

Eine Aktion $a \in \mathbb{A}$ heißt *admissibel (zulässig)* $\iff$

a wird von keiner Aktion strikt dominiert.

Die Aktion $a \in \mathbb{A}$ heißt *inadmissibel (unzulässig)* $\iff$

Es gibt eine Aktion a', so dass $a' \succ a$.

Die Menge aller admissiblen Aktionen werde mit $\mathbb{A}_{ad}$ bezeichnet, formal:

$$\mathbb{A}_{ad} := \{a \in \mathbb{A} | \nexists a^* \in \mathbb{A} : a^* \succ a\}$$

Bsp. 2.8 (Fortsetzung zu Bsp. 2.4)

Untersuchen Sie das folgende Entscheidungsproblem mit Hilfe der Dominanzrelationen:

	ϑ_1	ϑ_2
a_1	7	3
a_2	6	5
a_3	6	5
a_4	4	4
a_5	1	6
a_6	2	5
a_7	6	4
a_8	6.5	3.5

Erinnerung: Eine Aktion ist zulässig, wenn sie von keiner anderen Aktion *strikt* dominiert wird. Damit ergibt sich:

- Menge der zulässigen Aktionen: $\{a_1, a_2, a_3, a_5, a_8\}$

- Menge der nicht zulässigen Aktionen $\{a_4, a_6, a_7\}$

- Grafische Lösung siehe Bem. und Bsp. 2.11

Bem. 2.9 (Dominanzprinzip)

Im Folgenden werden zwei äquivalente Formulierungen gegeben:

Dominiert die Aktion a_1 die Aktion a_2 strikt, das heißt, gilt:

$$a_1 \succ a_2 \,,$$

so ist es nicht vernünftig, die Aktion a_2 zu wählen.

oder:
space

Es ist nicht vernünftig, eine inadmissible Aktion zu wählen.

Bem. 2.10

Das Dominanzprinzip ist das Rationalitätsprinzip der hier zugrunde gelegten Form der Entscheidungstheorie schlechthin.

Die in Bemerkung 2.9 der getroffenen Grundannahmen der Gültigkeit des Dominanzprinzips kann man somit als Test für das Zutreffen des hier verwendeten Modellierungsrahmen ansehen.
Hat man bei der Betrachtung einer Entscheidungstafel das Gefühl, dass die Allgemeingültigkeit des Dominanzprinzips bezweifelt werden kann, muss man prüfen, ob nicht grundlegende Annahmen wie insbesondere die Handlungsunabhängigkeit der Zustände verletzt sind.

Bem. 2.11 (Geometrische Interpretation der Zulässigkeit)

Wir betrachten erneut die Situation aus 2.4 und Bsp. 2.8.

Bem. 2.12 (Existenz und Nichtexistenz optimaler Aktionen)

i) Für endliche Aktionenmenge $\mathbb{A}$ existiert immer mindestens eine admissible Aktion.

ii) In allgemeineren Situationen müssen jedoch nicht notwendigerweise zulässige Aktion existieren.

Bem. 2.13 (Potentielle Inadmissibilität beim Übergang zur gemischten Erweiterung)

Vorsicht: Man kann bereits an einfachen Beispielen sehen, dass beim Übergang einer „reinen“ Aktionenmenge $\mathbb{A}$ zur gemischten Erweiterung $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ Aktionen, die in $\mathbb{A}$ zulässig sind, in $\mathcal{M}(\mathbb{A})$ inadmissibel werden können.

Def. 2.14 ((Wesentlich) vollständige Klassen)

a) Eine Teilmenge $\mathbb{C} \subset \mathbb{A}$ heißt *vollständig (complete)* $\Longleftrightarrow$
Für jede Aktion $a \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$ gibt es ein $a^* \in \mathbb{C}$, so dass

$$a^* \succ a$$

b) Eine Aktionenmenge $\mathbb{C} \subset \mathbb{A}$ heißt *wesentlich vollständig (essentially complete)* $\Longleftrightarrow$
Zu jeder Aktion $a \in \mathbb{A}$ (oder $\mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$) gibt es ein $a' \in \mathbb{C}$, so dass

$$a' \succeq a \, .$$

Bem. 2.15

i) Vollständige Klassen müssen alle admissiblen Aktionen enthalten; sie können auch nicht-admissible Aktionen enthalten.

ii) Interessant sind vor allem *minimale* Klassen, also (wesentlich) vollständige Klassen zu denen keine Untermengen existieren, die ebenfalls (wesentlich) vollständig sind. Eine minimal vollständige Klasse ist eindeutig, minimale wesentlich vollständige Klassen kann es mehrere geben.

iii) Minimal vollständige Klassen müssen nicht existieren. Wenn eine minimal vollständige Klasse $\mathbb{C}_{\text{min}}$ existiert, dann gilt

$$\mathbb{C}_{\text{min}} = \bigcap_{\mathbb{C}\text{vollständig}} \mathbb{C}$$

und

$$\mathbb{C}_{\text{min}} = \mathbb{A}_{ad}.$$

iv) Eine minimale wesentlich vollständige Menge (keine Eindeutigkeit) bildet die weitestgehende Reduktion eines Entscheidungsproblems auf seinen „wesentlichen“Kern. Sie enthält aus jeder Äquivalenzmenge von admissiblen Aktionen genau einen Repräsentanten.

2.1.3 Optimalitätskriterien

Def. 2.16 (Optimalitätskriterium / Entscheidungsregel)

Gegeben sei ein datenfreies Entscheidungsproblem $(\mathbb{A}, \Theta, u(\cdot))$.
Eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{R}^q \\ a &\mapsto \Phi(a) \end{aligned}$$

heißt *q-stufiges Optimalitätskriterium* oder *Entscheidungskriterium*.
Die Entscheidungsregel lautet dann: Suche

$$a^* \in \mathbb{A} \quad \text{mit} \quad \Phi(a^*) \geq \Phi(a) \qquad \forall a \in \mathbb{A}\,. \tag{2.1}$$

a^* heißt dann Φ-*optimale Aktion*, wobei im Fall $q \geq 2$ „$\geq$“ die lexikographische Ordnung meint.

Bem. 2.17

Es scheint mir nützlich, den Begriff der wesentlichen Vollständigkeit auch auf Optimalitätskriterien auszudehnen. Man würde dann eine Menge $\mathbb{C}_\Phi \subset \mathbb{A}$ als *wesentlich vollständig bezüglich dem Optimalitätskriterium* Φ bezeichnen, wenn es zu jedem $a \in \mathbb{A}$ ein $a' \in \mathbb{C}_\Phi$ gibt, so dass $\Phi(a') \geq \Phi(a)$.