6 Ausgewählte Aspekte der Bevölkerungsstatistik

6.0 Vorbemerkungen

Literatur

- Eisenmenger, M.(2005): Sterbetafel (2001/2003) *Wirtschaft und Statistik*: 5/2010, S. 463-478
- Eisenmenger M. & Emmerling D. (2011): https://www.destatis.de/DE/Publikationen/WirtschaftStatistik/Monatsausgaben/WistaMaerz11.html, aufgerufen am 18.12.2015 Amtliche Sterbetafeln und Entwicklung der Sterblichkeit. *Wirtschaft und Statistik* 3/2011. 219–238.
- Schaich, E. & Schweitzer, W. (1995): *Ausgewählte Methoden der Wirtschaftsstatistik*. Verlag Franz Vahlen. Insbesondere Kapitel 6.
- Statistisches Bundesamt (2015): https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/GesellschaftStaat/Bevoelkerung/Bevoelkerungsvorausberechnung/Bevoelkeru html Bevölkerungsvorausberechnung

- Statistisches Bundesamt (2015). Das statistische Jahrbuch; insbesondere Kapitel 2. Wiesbaden. Auch online unter `https://www.destatis.de/DE/Publikationen/StatistischesJahrbuch/StatistischesJahrbuch.html`, aufgerufen am 18.12.2015 Statistisches Jahrbuch
- Statistisches Bundesamt und Wissenschaftszentrum Berlin für Sozialforschung (2013): `https://www.destatis.de/DE/Publikationen/Datenreport/Datenreport.html`, aufgerufen am 18.12.2015 Datenreport – Ein Sozialbericht für die Bundesrepublik Deutschland. Insbesondere Kapitel 1 und 2.
- Viele internationale Daten findet man z.B. auch im „World Fact Book der CIA“ `https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/rankorder/rankorderguide.html`, aufgerufen am 18.12.2015 World Fact Book und beim United States Census Bureau, International Programs `https://www.census.gov/population/international/data/idb/informationGateway.php`, aufgerufen am 18.12.2015 United States Census Bureau

6.1 Gegenstand und Grundbegriffe

6.1.1 Gegenstand der Bevölkerungsstatistik

Aufgabe der Bevölkerungsstatistik ist die Beschreibung und Analyse von Umfang, Zusammensetzung und räumlicher Verteilung einer Bevölkerung sowie deren Veränderungen im Zeitablauf.

Statische Komponente – *Bevölkerungs<u>struktur</u>statistik*:
Betrachtung der Zusammensetzung einer Bevölkerung zu einem bestimmten Zeitpunkt
Dynamische Komponente – *Bevölkerungs<u>prozess</u>statistik*:
Betrachtung von Umfang, Zusammensetzung und räumlicher Verteilung im Zeitablauf

Demografie (Bevölkerungswissenschaft, siehe z.B. `http://www.demogr.mpg.de/de/ausbildungkarriere/was_ist_demografie_1908/default.htm`, aufgerufen am 18.12.2015 MPIDR, Rostock):

- modellbasiert
- Suche nach Hintergründen/ Erklärungen von Strukturen und Prozessen

Typische Variablen der Bevölkerungsstrukturstatistik:

- Geschlecht
- Alter
- Familienstand
- Beteiligung am Erwerbsleben
- Religionszugehörigkeit
- Nationalität
- Zugehörigkeit zu bestimmter geographischer Einheit

in Demografie zusätzlich:

- Bildungsstand
- Soziale Schicht
- Einkommen

Typische Themen in der Bevölkerungsprozessstatistik:

- Mortalität (Sterblichkeit)
- Fertilität (Fruchtbarkeit)
- Migration (Wanderungstätigkeit)
- Nuptialität (Heiratsverhalten)

Zur Bedeutung der Bevölkerungsstatistik:

- Kernbereich der amtlichen Statistik, Rechtsgrundlage: `http://www.buzer.de/gesetz/10596/index.htm`, aufgerufen am 18.12.2015 BevStatG
- stellt grundlegende Informationen für zahlreiche Entscheidungen und Planungen in Politik und Verwaltung bereit
- komplexe, langfristige Wechselwirkung mit gesellschaftliche Veränderungsprozessen
- gute Prognosen für die Bevölkerungsentwicklung sind essentiell, um entsprechende Anpassungen vornehmen zu können (z.B. Sozialsystem Deutschland)

→ aktuelle Daten

→ `https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/GesellschaftStaat/Bevoelkerung/Bevoelkerungsstand/Tabellen/Zensus_Geschlecht_Staatsangehoerigkeit.html`

→

	31.03.2013	30.06.2013	30.09.2013	31.12.2013
Bevölkerungsstand	1000			
Insgesamt	80 511,3	80 585,7	80 716,0	80 767,5
männlich	39 389,6	39 444,1	39 527,8	39 557,1
weiblich	41 121,7	41 141,5	41 188,2	41 210,4
Deutsche	73 807,0	73 773,8	73 775,7	73 755,7
männlich	35 991,5	35 982,3	35 989,3	35 984,3
weiblich	37 815,5	37 791,5	37 786,5	37 771,4
Nichtdeutsche	6 704,4	6 811,9	6 940,2	7 011,8
männlich	3 398,1	3 461,8	3 538,5	3 572,8
weiblich	3 306,3	3 350,1	3 401,7	3 439,0

6.1.2 Beschreibung der Bevölkerungsentwicklung

$B(t)$	(Bevölkerungs-)Bestand zum Zeitpunkt t
$Z(t_1, t_2)$	(Gesamt-)Zugänge im Intervall $(t_1, t_2]$
$A(t_1, t_2)$	(Gesamt-)Abgänge im Intervall $(t_1, t_2]$

Fortschreibungsformel:

$$B(t_2) = B(t_1) + Z(t_1, t_2) - A(t_1, t_2)$$

Zugänge und Abgänge können weiter differenziert werden, d.h.

$$Z(t_1, t_2) = G(t_1, t_2) + I(t_1, t_2)$$

mit

$G(t_1, t_2)$	Anzahl der Lebendgeborenen in $(t_1, t_2]$
$I(t_1, t_2)$	Anzahl der Zuwanderungen in $(t_1, t_2]$

und

$$A(t_1, t_2) = S(t_1, t_2) + E(t_1, t_2)$$

mit

$S(t_1, t_2)$	Anzahl der Gestorbenen in $(t_1, t_2]$
$E(t_1, t_2)$	Anzahl der Ausgewanderten in $(t_1, t_2]$,

also

$$B(t_2) = B(t_1) + G(t_1, t_2) + I(t_1, t_2) - S(t_1, t_2) - E(t_1, t_2)$$

Definition *Lebendgeborene*: „Kinder, bei denen nach der Trennung vom Mutterleib entweder das Herz geschlagen, die Nabelschnur pulsiert oder die natürliche Lungenatmung eingesetzt hat. Die übrigen Kinder gelten als Totgeborene oder Fehlgeburten. Die Ergebnisse der Statistik der natürlichen Bevölkerungsbewegung in den neuen Ländern und Berlin-Ost basieren bis einschließlich 1990 auf den Definitionen und Methoden der Statistik der ehemaligen DDR. Bei einem rückwirkenden Vergleich mit dem früheren Bundesgebiet ist dies zu beachten. Als Lebendgeborene wurden alle Kinder gezählt, bei denen nach dem vollständigen Verlassen des Mutterleibes – unabhängig von der Durchtrennung der Nabelschnur oder von der Ausstoßung der Plazenta – Herztätigkeit und Lungenatmung vorhanden waren.“ (Quelle: `https://www.destatis.de/DE/Publikationen/StatistischesJahrbuch/StatistischesJahrbuch2015.html`, aufgerufen am 18.12.2015 Statistisches Jahrbuch 2015, Kap. 2)

Geburtenüberschuss bzw. -defizit im Intervall $(t_1, t_2]$:

$$G(t_1, t_2) - S(t_1, t_2)$$

Wanderungssaldo des Intervalls $(t_1, t_2]$:

$$I(t_1, t_2) - E(t_1, t_2)$$

6.1.3 Rohe und spezifische Kennzahlen; erste Beispiele

Häufig werden bevölkerungsstatistische Kenngrößen und Bestandszahlen weiter nach bestimmten Merkmalen *gegliedert* ausgewiesen, insbesondere nach:

- Geschlecht (w,m), man schreibt dann $B_w(t)$, $B_m(t)$, $S_w(t_1, t_2)$, $S_m(t_1, t_2)$, etc.
- Alter (x), man schreibt dann $B_x(t)$, $S_x(t_1, t_2)$, für $x \in \{0, 1, \ldots, 100\}$. (Meistens werden die über 100-Jährigen zusammengefasst).
  Vorsicht, uneinheitliche Konvention in der Literatur: der Laufindex x kann sich neben dem erreichten Alter (in Jahren) auch auf das x-te Lebensjahr beziehen, und läuft dann von 1 bis 101.
- Eine tiefergehende Gliederung durch 2 Merkmale ist ebenfalls üblich, z.B. $B_{w,x}(t)$ Anzahl der Frauen im Alter x etc.
- Weitere gängige Gliederungsmerkmale sind z.B. Familienstand, Haushaltsgröße, Erwerbsstatus, geographische Herkunft.

Beispiel: Sexualproportion (Geschlechtsrelation, auf einen Zeitpunkt bezogen)

- rohe Sexualproportion (in der gesamten Bevölkerung)

$$\gamma(t) = \frac{B_w(t)}{B_m(t)} 1\,000$$

kann alternativ mit Gliederungszahlen (in Prozent) ausgedrückt werden:

$$\kappa_m(t) = \frac{B_m(t)}{B(t)} 100 \quad \text{und} \quad \kappa_w(t) = \frac{B_w(t)}{B(t)} 100 = 100 - \kappa_m(t)$$

Üblicherweise ist $\gamma > 1\,000$, d.h. es gibt global einen „Frauenüberschuss“, wegen höherer Sterblichkeit bei den Männern, insbesondere im höheren Alter.

- altersspezifische Sexualproportionen (in den einzelnen Altersgruppen):

$$\gamma_x(t) = \frac{B_{w,x}(t)}{B_{m,x}(t)} 1\,000, \quad \forall x \in \{0, 1, \ldots, 100\},$$

wobei $\gamma_0(t)$ die Sexualproportion der Lebendgeborenen bezeichnet.

- deutsche Bevölkerung nach Geschlecht Juni 2013 (Quelle: https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/GesellschaftStaat/Bevoelkerung/Bevoelkerungsstand/Tabellen/Zensus_Geschlecht_Staatsangehoerigkeit.html;jsessionid=A08E704B2E2DA5C6C9FC8532F458240B.cae4, aufgerufen am 18.12.2015 Statistisches Bundesamt)

$$\gamma(\text{Juni } 2013) = 1\,043$$

- globale Sexualproportion in Dtl. (30.06.2013): $^{41\,134\,000}/_{39\,452\,000}\,1\,000 \approx 1\,043$ (siehe https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/GesellschaftStaat/Bevoelkerung/Bevoelkerungsstand/Tabellen/Zensus_Geschlecht_Staatsangehoerigkeit.html jsessionid=A08E704B2E2DA5C6C9FC8532F458240B.cae4, aufgerufen am 18.12.2015 Stat. Bundesamt) vs. Sexualproportion der Lebendgeborenen im Juni 2013 (vorläufige Zahl): $^{26\,486}/_{28\,048}\,1\,000 \approx 944$ (siehe https://www-genesis.destatis.de/genesis/online/logon?language=de&sequenz=tabelleErgebnis&selectionname=12612-0002, aufgerufen am 18.12.2015 Stat. Bundesamt)

γ lässt sich als gewichtetes Mittel der γ_x schreiben:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \frac{B_w(t)}{B_m(t)}\,1\,000 = \sum_{x=0}^{100} \frac{B_{w,x}(t)}{B_m(t)}\,1\,000 = \\ &= \sum_{x=0}^{100} \frac{B_{w,x}(t)}{B_m(t)}\,\frac{B_{m,x}(t)}{B_{m,x}(t)}\,1\,000 = \sum_{x=0}^{100} \gamma_x(t)\frac{B_{m,x}(t)}{B_m(t)}.\end{aligned}$$

6.2 Bevölkerungsstrukturstatistik

6.2.1 Gliederung nach verschiedenen Merkmalen

- deutsche Bevölkerung nach Bundesland 2011 (Quelle: `https://www.destatis.de/DE/Publikationen/Datenreport/Datenreport.html`, aufgerufen am 18.12.2015 Datenreport 2013, Kapitel 1)

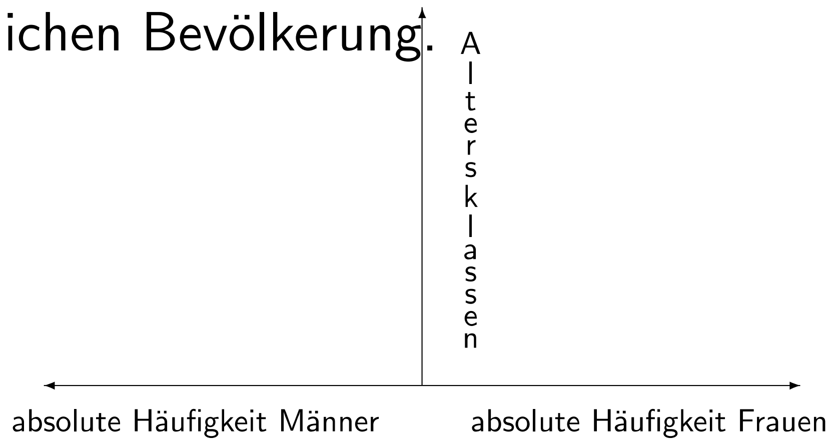
	Fläche in 1 000 km²	Einwohner/-innen je km²/Land
Baden-Württemberg	35,8	302
Bayern	70,6	179
Berlin	0,9	3 927
Brandenburg	29,5	85
Bremen	0,4	1 577
Hamburg	0,8	2 382
Hessen	21,1	289
Mecklenburg-Vorpommern	23,2	70
Niedersachsen	47,6	166
Nordrhein-Westfalen	34,1	523
Rheinland-Pfalz	19,9	201
Saarland	2,6	394
Sachsen	18,4	225
Sachsen-Anhalt	20,5	113
Schleswig-Holstein	15,8	180
Thüringen	16,2	137

- deutsche Bevölkerung nach Beteiligung am Erwerbsleben (Quelle: `https://www.destatis.de/DE/Publikationen/Datenreport/Datenreport.html`, aufgerufen am 18.12.2015 Datenreport 2013, Kapitel 5)

	Erwerbspersonen	Erwerbstätige	Erwerbslose	Erwerbslosenquote[1]
	in Millionen			in %
1991	40,93	38,77	2,16	5,3
1995	40,96	37,73	3,23	7,9
2000	42,39	39,26	3,14	7,4
2005	43,44	38,87	4,57	10,5
2010	43,49	40,55	2,95	6,8
2011	43,60	41,10	2,50	5,7
2012	43,86	41,55	2,32	5,3

6.2.2 Alterspyramiden

Alterspyramiden dienen der Veranschaulichung der Geschlechts- und Altersstruktur durch ein „geeignet zusammengelegtes Balkendiagramm/ Histogramm“ der Altersverteilung der männlichen und weiblichen Bevölkerung.

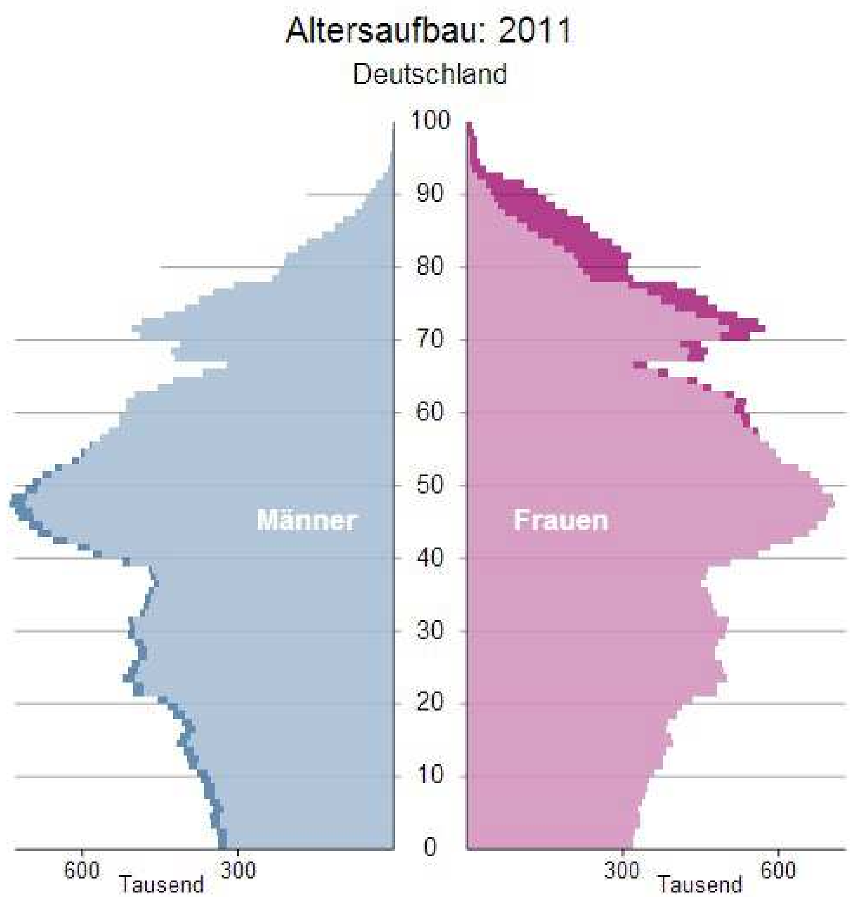


Man wählt üblicherweise wegen der größeren Anschaulichkeit:

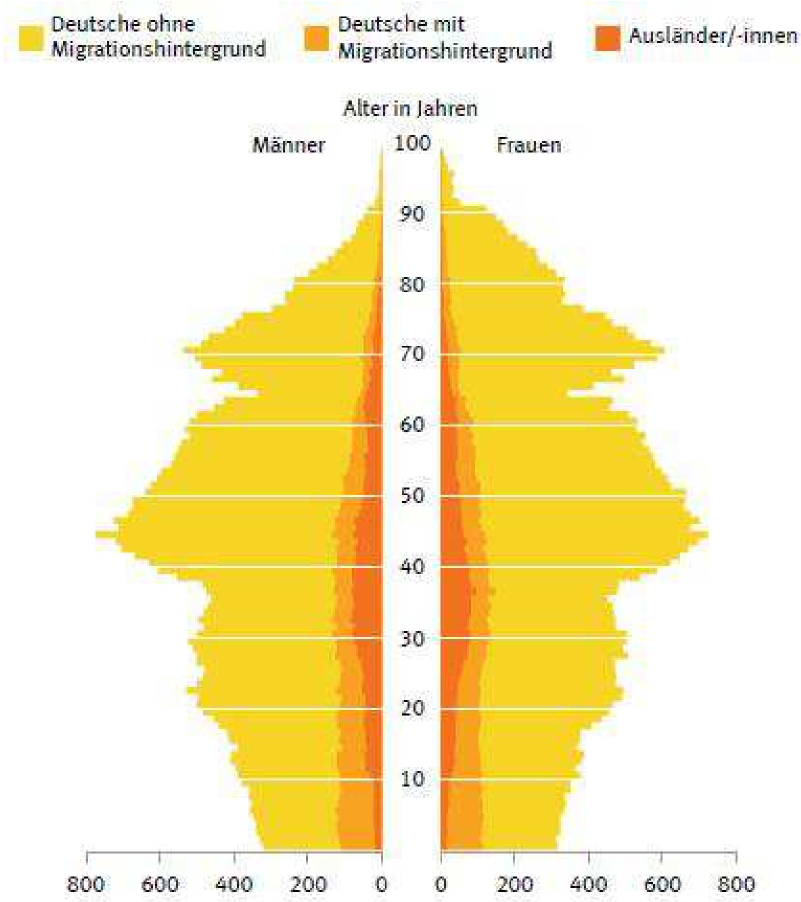
- absolute Häufigkeiten
- äquidistante Altersklassen

Die Sexualproportionen können über das Flächenverhältnis abgelesen werden.

Alterspyramide Deutschlands 2011 (Quelle: `https://www.destatis.de/bevoelkerungspy`
aufgerufen am 18.12.2015 Statistisches Bundesamt, animierte Graphik)

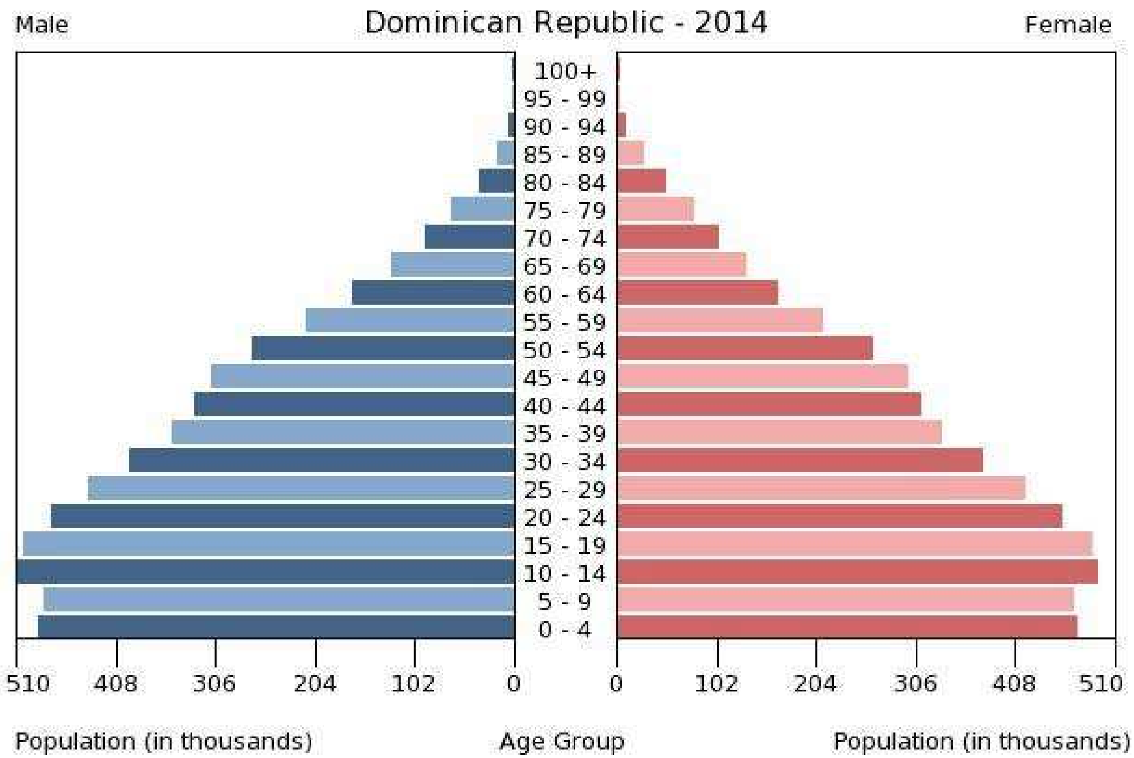


Alterspyramide 2010 nach Herkunft (Quelle: `https://www.destatis.de/DE/Publikationen/StatistischesJahrbuch/StatistischesJahrbuch2012.html`, aufgerufen am 18.12.2015 Statistisches Jahrbuch 2012, Kap. 2)

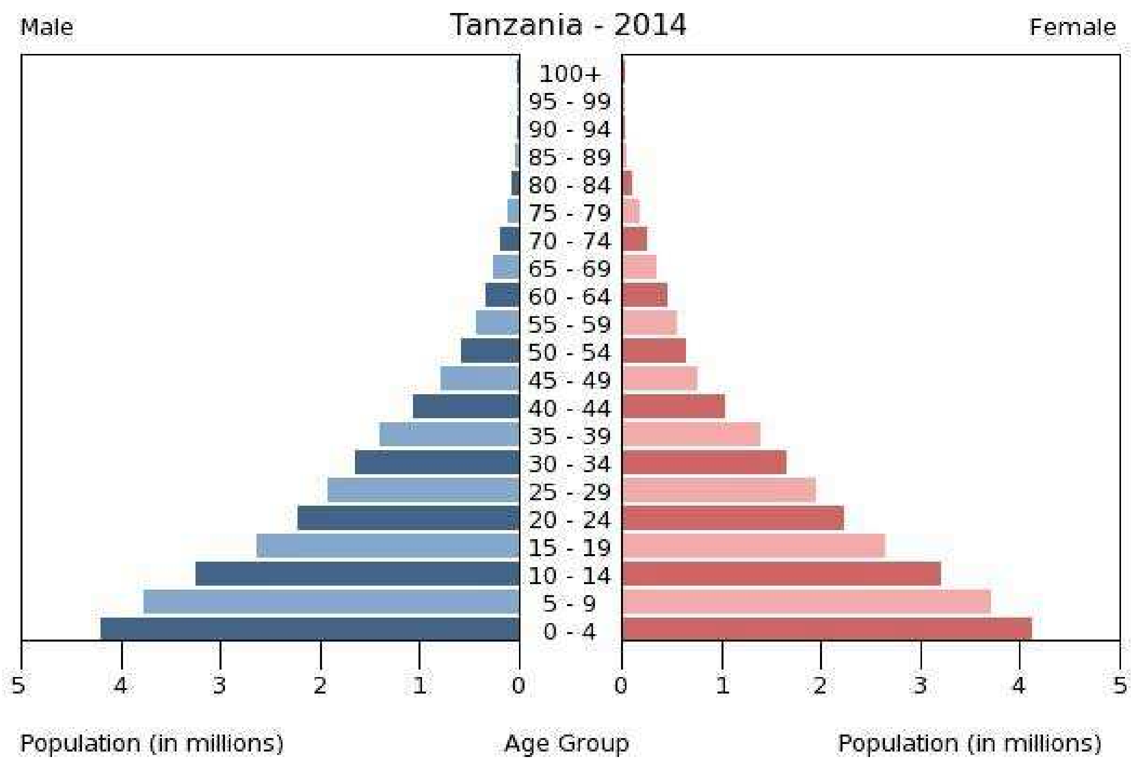


Man kann verschiedene Grundformen von Alterspyramiden definieren, beobachtet werden aber häufig Mischformen oder durch historische Ereignisse modifizierte Formen.

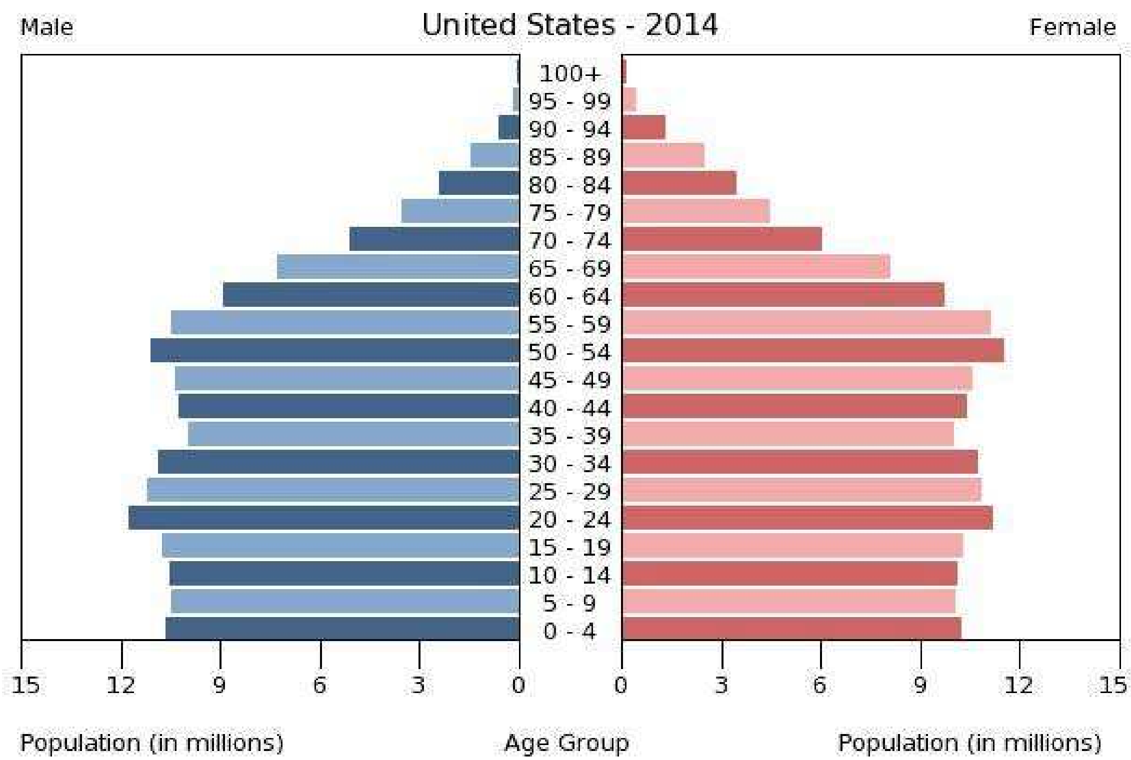
- Pyramidenförmiger Altersaufbau: ungefähr gleichseitiges Dreieck, z.B. Dominikanische Republik 2014 (Quelle: `https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/geos/dr.html`, aufgerufen am 18.12.2015 US Census bureau)


Male
Dominican Republic - 2014
Female
100+
95 - 99
90 - 94
85 - 89
80 - 84
75 - 79
70 - 74
65 - 69
60 - 64
55 - 59
50 - 54
45 - 49
40 - 44
35 - 39
30 - 34
25 - 29
20 - 24
15 - 19
10 - 14
5 - 9
0 - 4
510 408 306 204 102 0
0 102 204 306 408 510
Population (in thousands)
Age Group
Population (in thousands)

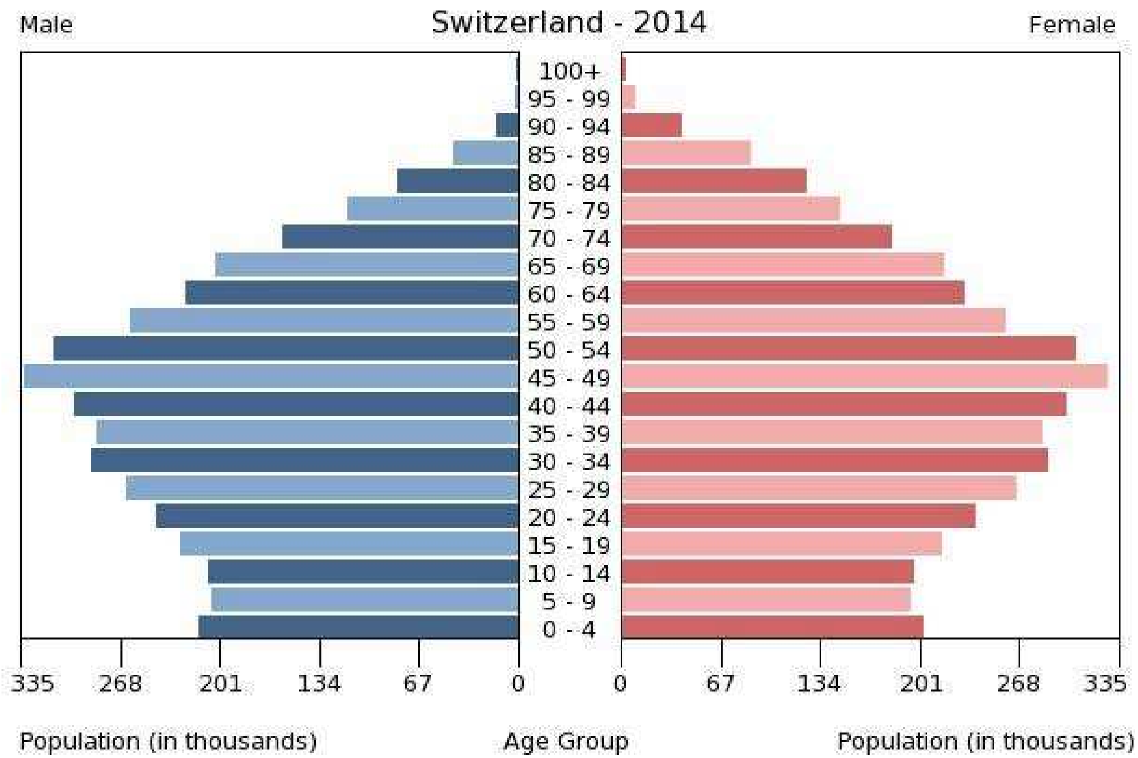
- Pagodenförmiger Altersaufbau: wie Pyramide mit überproportional verbreiterter Basis, z.B. Tansania 2014 (Quelle: `https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/geos/tz.html`, aufgerufen am 18.12.2015 US Census bureau)



- Bienenstockförmiger Altersaufbau: Idealform, da konstante Bevölkerung, z.B. USA 2014 (Quelle: `https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/geos/us.html`, aufgerufen am 18.12.2015 US Census bureau)



- Urnen-/ Zwiebelförmiger Altersaufbau: geringe Geburtenzahlen, hohe Lebenserwartung, z.B. Schweiz 2014 (Quelle: `https://www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/geos/sz.html`, aufgerufen am 18.12.2015 US Census bureau)



6.2.3 Weitere Kenngrößen zur Altersstruktur

Abhängigkeitsverhältnis in einem Jahr t:

$$AV(t) = \frac{\text{Umfang der Bevölkerung im nicht-erwerbsfähigen Alter zum Stichtag in } t}{\text{Umfang der Bevölkerung im erwerbsfähigen Alter zum Stichtag in } t} 100$$

z.B. $$AV(1980) = \frac{\sum_{x=0}^{19} B_x(1980) + \sum_{x=65}^{100} B_x(1980)}{\sum_{x=20}^{64} B_x(1980)} 100 \approx 73,$$

$$AV(1990) \approx 58, \quad AV(2000) \approx 61, \quad AV(2010) \approx 64$$

Abhängigkeitsverhältnis = Jugendquotient + Altenquotient

$$JQ(t) = \frac{\text{Umfang der Bevölkerung unter 20 zum Stichtag in } t}{\text{Umfang der Bevölkerung zwischen 20 und 64 zum Stichtag in } t} 100$$

$$AQ(t) = \frac{\text{Umfang der Bevölkerung 65-jährig und älter zum Stichtag in } t}{\text{Umfang der Bevölkerung zwischen 20 und 64 zum Stichtag in } t} 100$$

	Jugendquotient[1]	Altenquotient[2]
1950	50,8	16,3
1960	47,3	19,3
1970	53,4	24,6
1980	46,3	26,9
1990	34,2	23,6
2000	34,0	26,8
2010	30,3	33,8
2011	29,8	33,7

(Quelle: `https://www.destatis.de/DE/Publikationen/Datenreport/Datenreport.html`, aufgerufen am 18.12.2015 Datenreport 2013, Kapitel 1)

6.3 Bevölkerungsprozessstatistik

Dynamik der Bevölkerungsstruktur ergibt sich aus:

- Zugängen (Geburt, Zuwanderung)
- Abgängen (Tod, Abwanderung)
- Bewegungen zwischen den Sektoren (ledig → verheiratet, erwerbstätig → nicht erwerbstätig, Wanderungen zwischen verschiedenen geographischen Regionen)

Beschreibung der Änderungsprozesse durch:

- Anzahlen
- Raten (Anzahl bezogen auf Umfang)
- Tafeln (Übersicht über Raten nach Geschlecht und Alter)

6.3.1 Kohorten versus Periodensicht

- Kohorte: reale Gesamtheit von Personen, z.B. 100000 Lebendgeborene eines Jahrgangs $\longrightarrow$ Kohortentafel

- Periodentafel: beobachte Prozess in kurzer Spanne (z.B. 3 Jahre) bei allen Personen aller Altersklassen

Kohorten- versus Periodensicht z.B. auf Sterbefälle:

- Generationen-/Kohortensicht: bildet den tatsächlichen Sterbeprozess einer bestimmten Kohorte vollständig ab.
  * z.B. Kohorte von $100\,000$ Lebendgeborenen eines Geburtenjahrgangs.
  * Berechnung entsprechender Tafeln (siehe später genauer) sehr aufwändig, denn sie erfordert die ständige Beobachtung aller Mitglieder der Kohorte bis zum Tod des letzten Mitglieds.
  * Praktisch basieren Generationentafeln teilweise auf Schätzungen.

- Perioden-/Querschnittssicht: bildet die aktuellen Sterbeverhältnisse in allen Altersklassen ab.

* Meistens werden bei Tafeln (s.u.) Periodentafeln verwendet, da sie schnell verfügbar sind.
* (Rest-)Lebenserwartung wird unter der Annahme berechnet, dass die altersspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten konstant bleiben.
* Derzeit beziehen sich die Sterbetafeln für Deutschland jeweils auf einen Zeitraum von 3 Jahren.

6.3.2 Sterbe-Raten

Def. 6.1.

Sei $A(t)$ die Anzahl der Abgänge eines bestimmten Typs (nachfolgend Todesfälle) in $(0,t]$. Setzt man, wie durchgängig im Folgenden, $A(t)$ als differenzierbar voraus, so heißt

$$a(t) = \frac{dA(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{A(t+h) - A(t)}{(t+h) - t}$$

Abgangsfunktion (Abgangsintensität).

Mit $B(t)$ als Bestand zum Zeitpunkt t, ist die Abgangsrate definiert durch

$$r_{a(t)} = \frac{a(t)}{B(t)}.$$

Analog kann man auch $Zugangsraten$ definieren.

Operationalisierung der Sterberate:

- Approximation des Differentialquotienten durch den Differenzenquotient für $h = 1$:

$$a(t) \approx \frac{A(t+1) - A(t)}{(t+1) - t} = A(t+1) - A(t) = S(t, t+1)$$

- Operationalisierung des Bevölkerungsbestands als Durchschnittsbestand in $(t, t+1]$:

$$\overline{B}(t, t+1) = \int\limits_{t}^{t+1} B(u) du$$

- Approximation von $\overline{B}(t, t+1)$ durch

$$\overline{B}(t, t+1) \approx \frac{B(t) + B(t+1)}{2} \approx B\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

Def. 6.2.

Unter Verwendung der obigen Approximationen heißt

$$m(t) = \frac{S(t, t+1)}{\overline{B}(t, t+1)} \, 1\,000 \tag{6.24}$$

(operationale Form der) <u>rohe(n) Sterberate</u> (Sterbeziffer).

Auf Basis dieser Definition lassen sich altersspezifische Sterberaten bestimmen:

$$m_x(t) = \frac{S_x(t, t+1)}{\overline{B}_x(t, t+1)}\, 1\,000, \quad \forall x \in \{0, 1, \ldots, 100\}.$$

$m(t)$ lässt sich als gewichtetes Mittel der $m_x(t)$ schreiben.
Mit $g_x(t) := \frac{\overline{B}_x(t,t+1)}{\overline{B}(t,t+1)}$ erhält man

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{S(t,t+1)}{\overline{B}(t,t+1)} = \frac{\sum_{x=0}^{100} S_x(t,t+1)}{\overline{B}(t,t+1)} = \\ &= \sum_{x=0}^{100} \frac{S_x(t,t+1)}{\overline{B}(t,t+1)} \frac{\overline{B}_x(t,t+1)}{\overline{B}_x(t,t+1)} = \\ &= \sum_{x=0}^{100} m_x(t) \frac{\overline{B}_x(t,t+1)}{\overline{B}(t,t+1)} \\ &= \sum_{x=0}^{100} m_x(t) \cdot g_x(t) \end{aligned}$$

Die Höhe der globalen Sterberate wird sehr stark durch die Bevölkerungsstruktur beeinflusst. Daher werden für internationale Vergleiche häufig sog. standardisierte Sterberaten verwendet, die auf Gewichten $g_x^*(t)$, mit $x \in \{0, \ldots, 100\}$, einer Referenzpopulation basieren.

Dann heißt

$$m^*(t) = \sum_{x=0}^{100} m_x(t) g_x^*(t) \qquad \text{bzw.} \qquad m^*(t) = \sum_{x=0}^{100} m_x(t) g_x^*(t) \cdot 1000$$

standardisierte (allgemeine) Sterberate (Sterbeziffer).

6.3.3 Sterbetafeln

Idee:

- Eine Sterbetafel ist ein demografisches <u>Modell</u> für die Sterblichkeitsverhältnisse einer Bevölkerung, die unabhängig von der konkreten Größe und Altersstruktur der Bevölkerung dargestellt werden.
- Es werden u.a. geschlechts- und altersspezifische „Sterbewahrscheinlichkeiten“ dargestellt.
- Sterbetafeln sind prognostisch verwendbar (z.B. zur Prämienkalkulation bei Lebensversicherungen).

Aufbau einer Sterbetafel:

- Tabellarische Darstellung der „Abgangsordnung“ eines sich durch Todesfälle ständig reduzierenden Bevölkerungsbestandes.
- Wie viele von z.B. $100\,000 =: \ell_0$ Lebendgeborenen erreichen das Alter x?
- i.d.R. Periodentafel
- Notation: Das Argument t wird im Folgenden weggelassen.
- (Schätzung der) „Sterbewahrscheinlichkeit“ durch relative Häufigkeit:

$$q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x},$$

wobei ℓ_x der Anzahl der betrachteten Lebenden im Alter $x \in \{0, \ldots, 100\}$ entspricht.

Es gilt unter bezug auf (6.24):

$$q_x = \frac{2\,m_x}{2 + m_x} \quad \text{bzw.} \quad m_x = \frac{2\,q_x}{2 - q_x}.$$

Sterbetafel 2009/2011

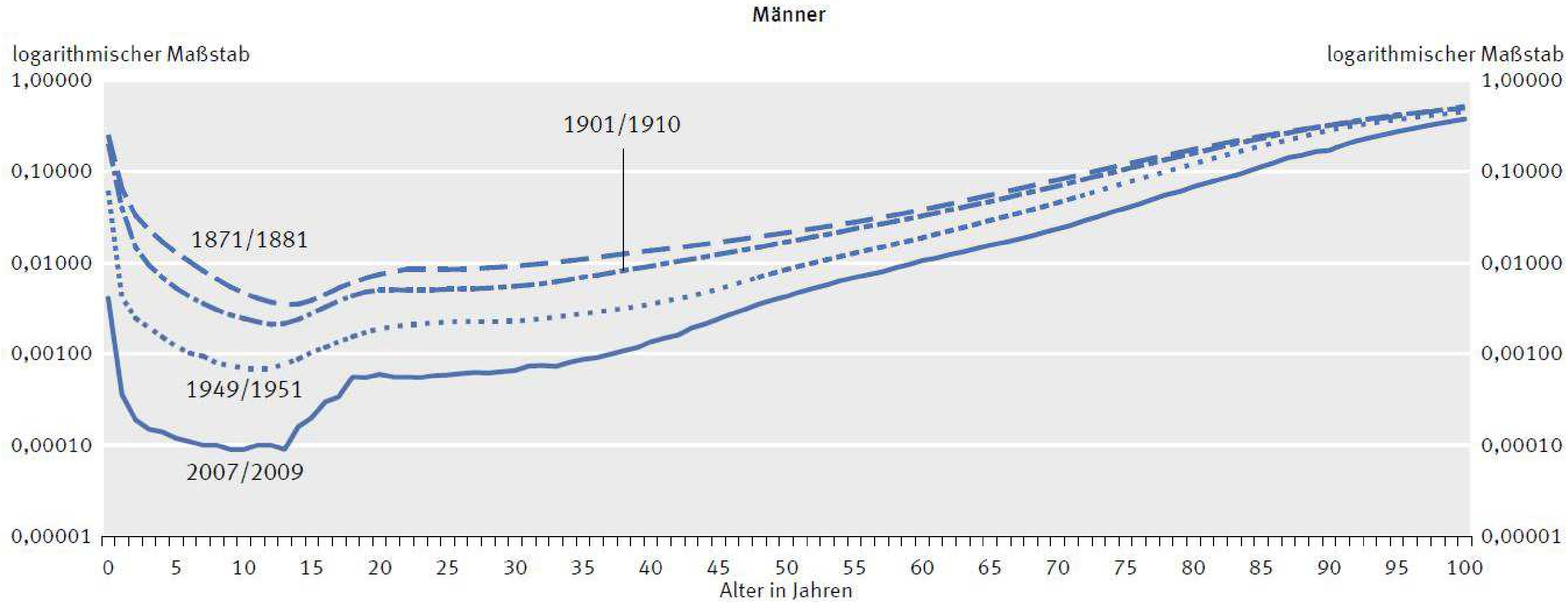
Deutschland

Weiblich*)

Vollendetes Alter	Sterbe- wahrscheinlichkeit vom Alter x bis x+1	Überlebens- wahrscheinlichkeit vom Alter x bis x+1	Überlebende im Alter x	Gestorbene im Alter x bis unter x+1	Von den Überlebenden im Alter x bis zum Alter x+1 durchlebte Jahre	Von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebende Jahre	Durchschnittliche Lebenserwartung im Alter x in Jahren
x	q_x	p_x	l_x	d_x	L_x	$e_x l_x$	e_x
0	0,00315269	0,99684731	100 000	315	99 736	8 272 549	82,73
1	0,00026396	0,99973604	99 685	26	99 672	8 172 812	81,99
2	0,00014894	0,99985106	99 658	15	99 651	8 073 141	81,01
3	0,00011173	0,99988827	99 644	11	99 638	7 973 490	80,02
4	0,00011918	0,99988082	99 632	12	99 627	7 873 852	79,03
5	0,00010107	0,99989893	99 621	10	99 616	7 774 225	78,04
6	0,00008709	0,99991291	99 610	9	99 606	7 674 610	77,05
7	0,00008583	0,99991417	99 602	9	99 598	7 575 004	76,05
8	0,00007364	0,99992636	99 593	7	99 590	7 475 406	75,06
9	0,00006898	0,99993102	99 586	7	99 583	7 375 816	74,06

(Quelle: https://www.destatis.de/DE/Publikationen/Thematisch/Bevoelkerung/Bevoelkerungsbewegung/PeriodensterbetafelnBundeslaender5126204117004.html, aufgerufen am 18.12.2015 Statistisches Bundesamt)

Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeiten für die männliche Bevölkerung in Deutschland seit 1871/1881 (Graphik aus: Eisenmenger & Emmerling (2011))



„Tafelfunktionen“: Tafelfunktionen ist ein feststehender Begriff, der die in der Tafel aufgezeichnete Funktionen von ℓ_x bezeichnet.

- Anzahl der Gestorbenen im Alter $x \in \{0, \ldots, 100\}$:

$$d_x = \ell_x - \ell_{x+1}$$

- Sterbe- bzw. Überlebenswahrscheinlichkeit zwischen Alter x und Alter $x+1$:

$$q_x = \frac{\ell_x - \ell_{x+1}}{\ell_x} = 1 - \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x} = \frac{d_x}{\ell_x} \quad \text{bzw.} \quad p_x = 1 - q_x = \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}$$

- Anzahl der von den Überlebenden im Alter $x > 0$ bis zum Alter $x+1$ durchlebten Personenjahre[19]

$$L_x = \ell_{x+1} + \frac{1}{2} d_x = \frac{1}{2} \left(\ell_x + \ell_{x+1}\right)$$

[19] Fr $x = 0$ ist eine gesonderte Berechnung erforderlich.

- Anzahl der von den Überlebenden im Alter x insgesamt noch zu durchlebenden Jahre:

$$T_x = \sum_{y=x}^{100} L_y$$

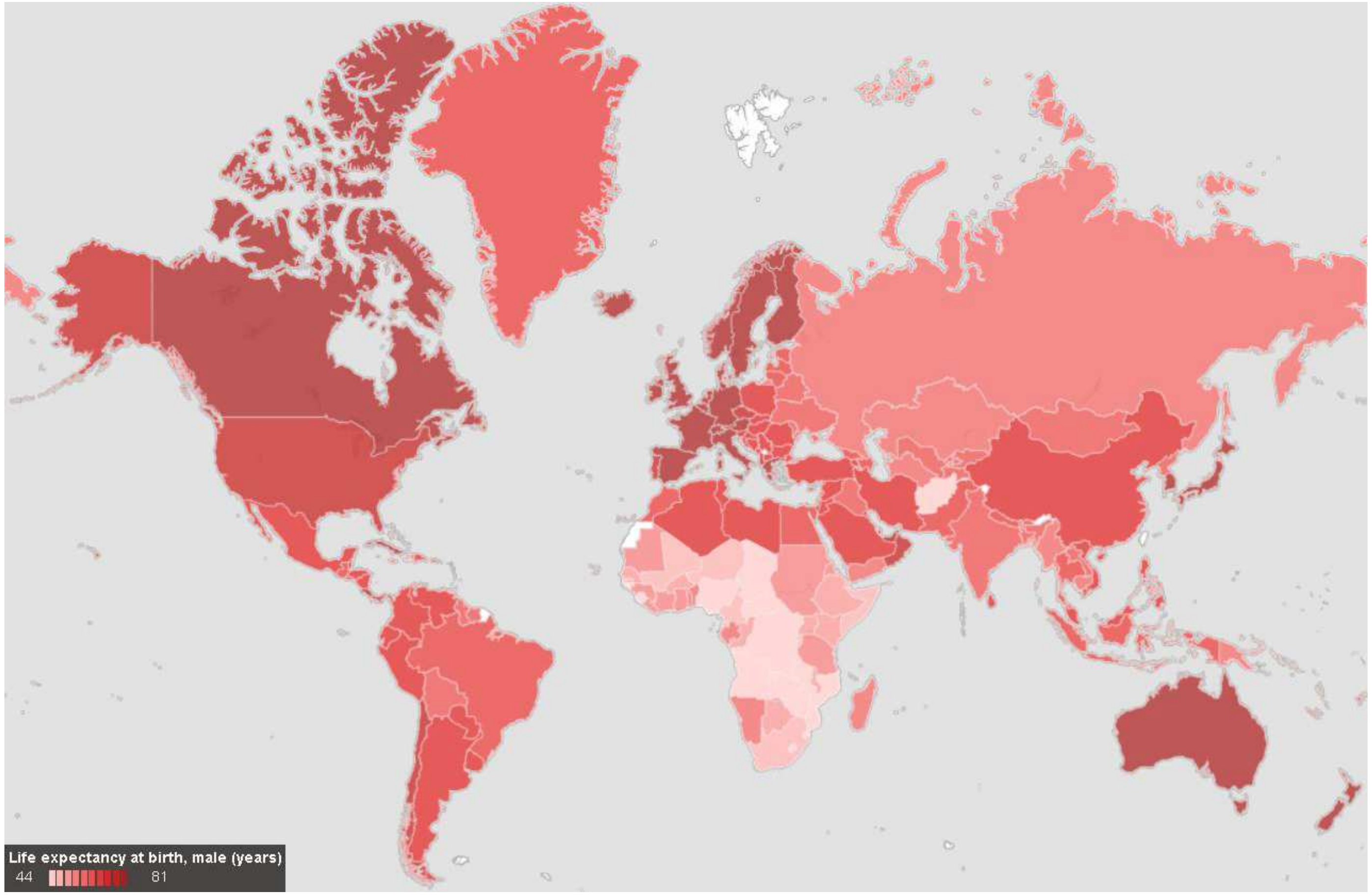
- durchschnittliche Restlebenserwartung der Überlebenden im Alter x:

$$e_x = \frac{T_x}{\ell_x}$$

- Gesamtlebenserwartung eines Neugeborenen:

$$e_0$$

Lebenserwartung eines männlichen Neugeborenen weltweit (Quelle: `http://data.worldbank.org/indicator?display=map`, aufgerufen am 18.12.2015 Weltbank)



Praktische Schätzung von Sterbewahrscheinlichkeiten:

- Geburtsjahrmethode nach Becker-Zeuner: alle Sterbefälle eines Geburtsjahrganges
- Sterbejahrmethode von Raths: Sterbefälle eines Jahres, also auf zwei Geburtsjahrgänge bezogen
- Sterberatenmethode nach Farr: zunächst Schätzung altersspezifischer Sterberaten, die über (6.24) in Sterbewahrscheinlichkeiten umgerechnet werden
- Die Schätzungen der Sterbewahrscheinlichkeiten werden in der Praxis meist noch (z.B. durch Splines) geglättet.

6.3.4 Weitere Änderungsprozesse

Migration

- Binnenwanderung: Wanderungsströme innerhalb Deutschlands
- Außenwanderung: Wanderungsströme zwischen Deutschland und anderen Ländern

Kennzahlen zur Beschreibung von Wanderungsprozessen:

- Binnenwanderung: Mobilitätsziffer bezogen auf ein Jahr t

$$\frac{\text{im Jahr } t \text{ über Gemeindegrenzen hinaus in Deutschland umgezogene Personen}}{\text{Bevölkerungsbestand zu Beginn des Jahres } t} 1\,000$$

- Außenwanderung: Wanderungssaldo im Zeitraum $(t_1, t_2]$

$$I(t_1, t_2) - E(t_1, t_2)$$

Fertilität

Fertilitätsraten bezogen auf ein Jahr t:

- rohe Kennzahl: allgemeine Fruchtbarkeitsziffer für die gesamte Bevölkerung

$$\frac{\text{Lebendgeborene im Jahr } t}{\text{Frauen im Alter von 15 bis 44 am } 31.12.t} \, 1\,000$$

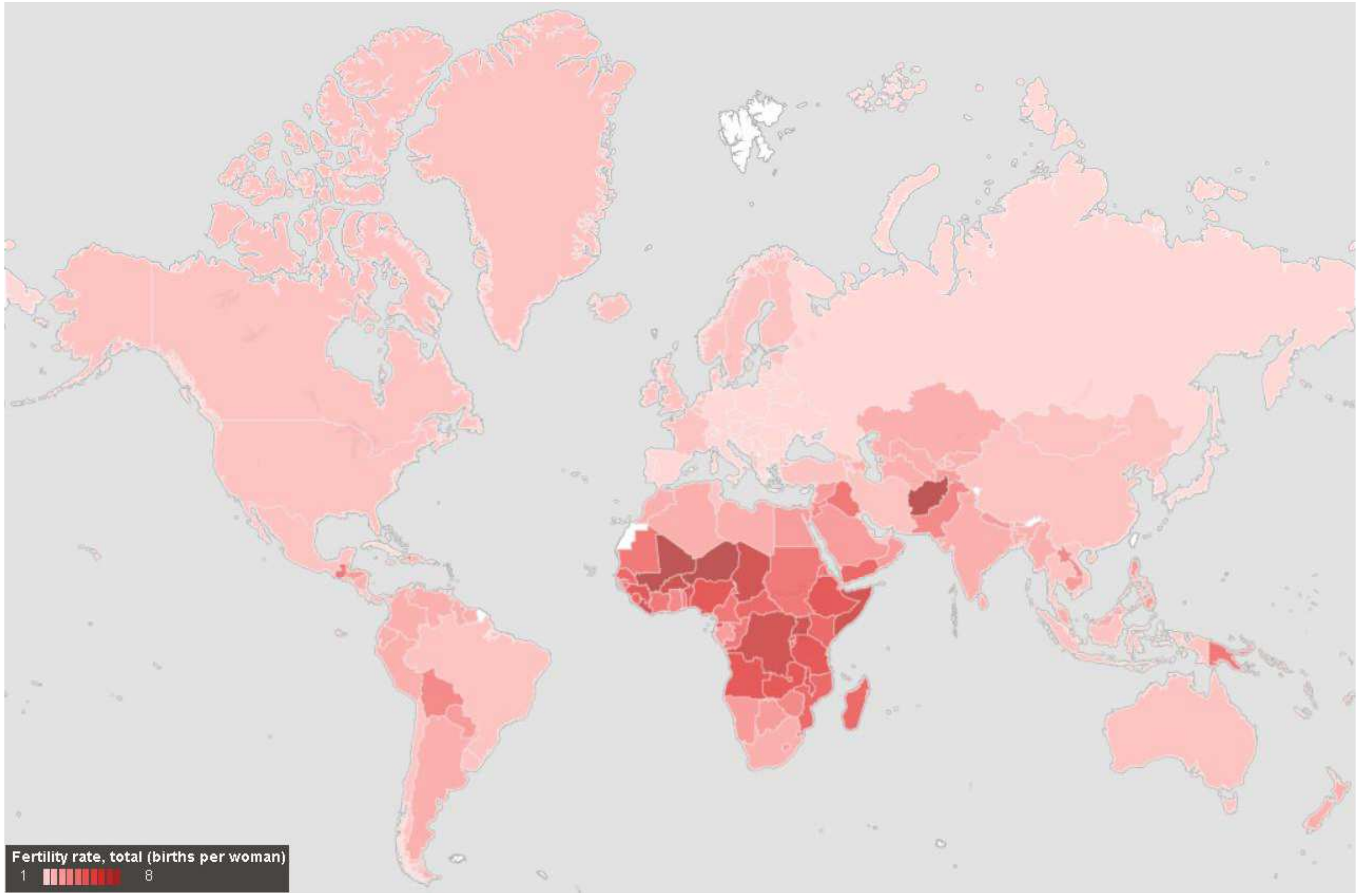
- spezifische Kennzahlen: altersspezifische Geburtenziffer für $x \in \{15, \ldots, 44\}$

$$\frac{\text{von Müttern im Alter } x \text{ Lebendgeborene im Jahr } t}{\text{Frauen im Alter } x \text{ am } 31.12.t} \, 1\,000$$

- zusammengefasste Geburtenziffer (Totale Fertility Rate; TFR) für 2011 in Dtl. (Quelle: `https://www.destatis.de/DE/Publikationen/StatistischesJahrbuch/StatistischesJahrbuch2013.html`, aufgerufen am 18.12.2015 Statistisches Jahrbuch 2013, Kapitel 2)

$$\sum_{x=15}^{44} \frac{\text{von Müttern im Alter } x \text{ Lebendgeborene im Jahr } 2011}{\text{Frauen im Alter } x \text{ am } 31.12.2011} \approx 1.4$$

Zusammengefasste Geburtenziffer weltweit (Quelle: `http://data.worldbank.org/indicator?display=map`, aufgerufen am 18.12.2015 Weltbank)



Beispiel: Scheidungsraten (auf ein Jahr bezogen)

- rohe (globale, unspezifische) Kennzahl: allgemeine Scheidungsziffer für die gesamte Bevölkerung ausgewiesen

$$\frac{\text{Ehescheidungen im Jahr } t}{\text{verheiratete Frauen am } 01.01.t} \, 1\,000$$

- spezifische Kennzahlen: ehedauerspezifische Scheidungsziffer, jeweils separat für die einzelnen Heiratsjahrgänge ausgewiesen

$$\frac{\text{Anzahl der geschiedenen, seit } x \text{ Jahren bestehenden, Ehen im Jahr } t}{\text{im Jahr } t - x \text{ geschlossene Ehen}} \, 1\,000$$

- Zusammengefasste ehedauerspezifische Scheidungsziffer für 2011 in Dtl. (`https://www.destatis.de/DE/Publikationen/StatistischesJahrbuch/StatistischesJah`
`html`, aufgerufen am 18.12.2015 Statistisches Jahrbuch 2013, Kapitel 2)

$$\sum_{x=0}^{25} \frac{\text{Anzahl der gesch., seit } x \text{ Jahren best., Ehen im Jahr } 2011}{\text{im Jahr } 2011 - x \text{ geschlossene Ehen}} \, 1\,000 = 391$$

6.4 Bevölkerungsvorausberechnungen

6.4.1 Das Leslie-Modell zur Bevölkerungsprognose

- Modell geht auf einen Artikel von P.H. Leslie zurück: `http://biomet.oxfordjournals.org/content/33/3/183.full.pdf+html?sid=198d9ff7-703d-443` aufgerufen am 18.12.2015 Leslie (1945). On the Use of Matrices in certain Population Mathematics. Biometrika 33.
- 3 Komponenten der Bevölkerungsentwicklung: Geburten, Sterbefälle, Migration
- Bevölkerung wird nach Alter und Geschlecht gegliedert betrachtet
- zentrale Annahme: alters- und geschlechtsspezifische Geburten- und Sterberaten, sowie Wanderungssalden sind über die Zeit konstant

Beispiel hypothetische Population:

Alter x	$B_{w,x}(t_0)$	$B_{m,x}(t_0)$	$B_x(t_0)$
0	100	110	210
1	70	30	100
2	20	12	32

- altersspezifische Geburtenraten (bezogen auf 1 Mutter):

$$\mu_x = \frac{\text{von Müttern im Alter } x \text{ Lebendgeborene im Jahr } t_0}{\text{Frauen im Alter } x \text{ am } 31.12.t_0}$$

Geburtenraten für die hypothetische Population: $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 0.2$

- Sexualproportion der Lebendgeborenen: $\gamma_0 = {}^{100}/_{110} = 0.9091$

- alters- und geschlechtsspezifische Übergangsraten $\pi_{w,x}$ und $\pi_{m,x}$ von einer Altersklasse x in die darauffolgende $x+1$:

$$\pi_{w,x} = \frac{L_{w,x+1}}{L_{w,x}} \quad \text{bzw.} \quad \pi_{m,x} = \frac{L_{m,x+1}}{L_{m,x}},$$

wobei $L_{w,x}$ und $L_{m,x}$ die durchschnittlichen Bestände im Altersjahr x aus den Sterbetafeln sind; mit

$$L_x = \ell_x - {}^1\!/_2\, d_x = {}^1\!/_2\,(\ell_x + \ell_{x+1})$$

gilt also

$$\pi_{w,x} = \frac{(\ell_{w,x+1} + \ell_{w,x+2})/2}{(\ell_{w,x} + \ell_{w,x+1})/2}$$

Auszug aus der Sterbetafel für weibliche Mitglieder der hypothetische Population:

Alter x	l_x	d_x	p_x	q_x	L_x
0	100 000	20 000	0.8000	0.2000	90 000
1	80 000	48 000	0.4000	0.6000	56 000
2	32 000	32 000	0.0000	1.0000	16 000

Übergangsraten für die weibliche Teilpopulation: $\pi_{w,0} = 0.6222$, $\pi_{w,1} = 0.2857$

Bevölkerungsvorausberechnung nur für die weibliche Teilpopulation im Jahr $t_1 = t_0 + 1$:

- Annahme: keine Wanderungsbewegungen
  Modell der Vorausberechnung wird durch sogenannte Leslie-Matrix $\mathbb{L}$ ausgedrückt

$$\mathbb{L}^{(w)} = \begin{pmatrix} \kappa_w\,\mu_0 & \kappa_w\,\mu_1 & \kappa_w\,\mu_2 \\ \pi_{w,0} & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{w,1} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\gamma_0 = {}^{10}/_{11}$ bedeutet $\kappa_w = {}^{10}/_{21}$, mit $\pi_{w,0} = 0.6222, \pi_{w,1} = 0.2857$ ergibt sich

$$\mathbb{L}^{(w)} = \begin{pmatrix} 0 & {}^{10}/_{21}\,2.2 & {}^{10}/_{21}\,0.2 \\ 0.6222 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2857 & 0 \end{pmatrix}$$

- und damit für den vorausberechnete Bevölkerungsbestand $\mathbf{B}_w(t_1) =$

$(B_{w,0}(t_1), B_{w,1}(t_1), B_{w,2}(t_1))^T$:

$$\mathbf{B}_w(t_1) = \mathbb{L}^{(w)}\,\mathbf{B}_w(t_0) = \begin{pmatrix} 0 & {}^{10}\!/_{21}\,2.2 & {}^{10}\!/_{21}\,0.2 \\ 0.6222 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2857 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 20 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 75 \\ 62 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Vorausberechnung für die gesamte hypothetische Population im Jahr $t_1 = t_0 + 1$:

- Annahme: keine Wanderungsbewegungen
- es sind $\kappa_w = {}^{10}/_{21}$ und $\kappa_m = {}^{11}/_{21}$, seien $\pi_{m,0} = 0.5$ und $\pi_{m,1} = 0.25$

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \kappa_w\,\mu_0 & \kappa_w\,\mu_1 & \kappa_w\,\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_{w,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi_{w,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \kappa_m\,\mu_0 & \kappa_m\,\mu_1 & \kappa_m\,\mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{m,0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{m,1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & {}^{10}/_{21}\,2.2 & {}^{10}/_{21}\,0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6222 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2857 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^{11}/_{21}\,2.2 & {}^{11}/_{21}\,0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2500 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{B}(t_1) = (B_{w,0}(t_1), B_{w,1}(t_1), B_{w,2}(t_1), B_{m,0}(t_1), B_{m,1}(t_1), B_{m,2}(t_1))^T$ berechnet sich analog als

$$\mathbf{B}(t_1) = \mathbb{L}\,\mathbf{B}(t_0) \approx (75, 62, 20, 83, 55, 8)^T$$

- allgemeiner für beliebiges $t_k = t_0 + k$ mit $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbf{B}(t_k) = \mathbb{L}^k\,\mathbf{B}(t_0)$$

- Unter Regularitätsbedingungen kann der asymptotische Gleichgewichtsbestand $(k \to \infty)$ über den zum größten Eigenwert gehörenden Eigenvektor ermittelt werden

- wird zusätzlich ein Vektor von alters- und geschlechtsspezifischen Wanderungssalden $\eta = (\eta_{w,0}, \eta_{w,1}, \eta_{w,2}, \eta_{m,0}, \eta_{m,1}, \eta_{m,2})^T$, so berechnet sich $\mathbf{B}(t_1)$ als

$$\mathbf{B}(t_1) = \mathbb{L}\,\mathbf{B}(t_0) + \eta$$

6.4.2 Zwölfte koordinierte Bevölkerungsvorausberechnung der statistischen Ämter

siehe auch `https://www.destatis.de/DE/ZahlenFakten/GesellschaftStaat/Bevoelkerung/Bevoelkerungsvorausberechnung/Bevoelkerungsvorausberechnung.html`, aufgerufen am 18.12.2015 Statistisches Bundesamt, (2009)

- Bevölkerungsentwicklung bis 2060
- basiert auf Kohorten-Komponenten-Modell zur Vorausberechnung
- insgesamt 12 Szenarien aus Annahmen über:
  - Geburtenhäufigkeit: zusammengefasste Geburtenziffer bleibt konstant bei 1.4, wobei das durchschnittliche Gebäralter um 1.6 Jahre ansteigt, sowie 2 weitere Annahmen
  - Lebenserwartung: Anstieg der Lebenserwartung bei Geburt auf 85 und 89.2 Jahre oder auf 87.7 und 91.2 Jahre
  - Wanderungssaldo: langfristig konstant bei $100\,000$ oder bei $200\,000$

- Ergebnisse u.a. als `https://www.destatis.de/bevoelkerungspyramide/`, aufgerufen am 18.12.2015 animierte Bevölkerungspyramide veröffentlicht