Ergänzende Notizen zu Aufgabe 18, Blatt 5

Zu Zeigen: Der Geradenanstieg der Lorenzkurve wird immer steiler.

Erinnerung: Die Lorenzkurve ist ein Polygonzug durch die Punkte

$$(u_0, v_0), \ldots, (u_n, v_n)$$

d.h. eine stückweise lineare Funktion (wobei die u_ℓ und v_ℓ definiert sind wie in Definition 5.3 des Ergänzungsmaterials). Wir zeigen (durch Widerspruch), dass der Anstieg der einzelnen Geradenabschnitte immer grösser wird.

Wäre der Geradenanstieg zwischen den Punkten (u_{j+1}, v_{j+1}) und (u_{j+2}, v_{j+2}) kleiner als zwischen (u_j, v_j) und (u_{j+1}, v_{j+1}), so würde gelten:

$$\frac{v_{j+2} - v_{j+1}}{u_{j+2} - u_{j+1}} < \frac{v_{j+1} - v_j}{u_{j+1} - u_j},$$

Es gilt jedoch (mit $p_{(\ell)} := \frac{x_{(\ell)}}{\sum_{i=1}^n x_i}$):

- $v_{\ell+1} - v_\ell = p_{(\ell+1)}$ für alle $\ell = 0, \ldots, n-1$ (nachrechnen!)
- $u_{\ell+1} - u_\ell = \frac{1}{n}$ für alle $\ell = 0, \ldots, n-1$ (nachrechnen!)

Damit folgt aus obiger Ungleichung $p_{(j+2)} < p_{(j+1)}$ (nachrechnen!), im Widerspruch zur wahren Ordnung der $p_{(i)}$'s.

Die gerade gezeigte Eigenschaft der Lorenzkurve kann nun benutzt werden, um zu beweisen, dass die Lorenzkurve **konvex** ist.