# Einführung in die diskreten Bayes- und Kredal-Netze

Master-Seminar
im Wintersemester 2015/16

Patrick Schwaferts

Institut für Statistik, LMU

16. Januar 2016

# Übersicht

# Bayes-Netz

$X_1, \dots, X_n$

# Bayes-Netz

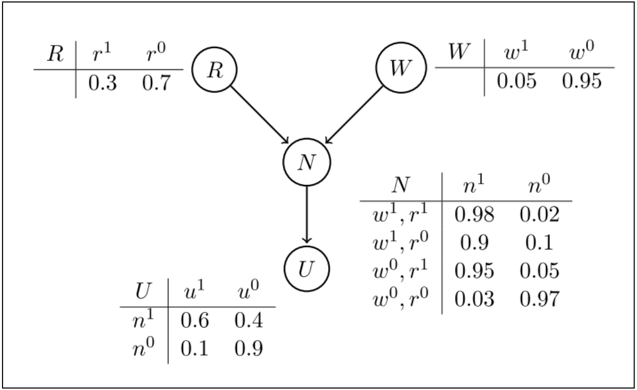
$$X_1, \dots, X_n$$

$(\mathcal{G}, M)$

# Bayes-Netz

$X_1, \dots, X_n$

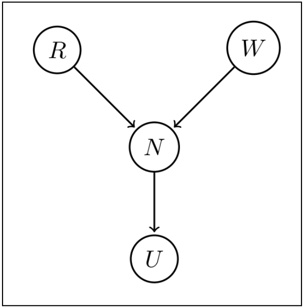
$(\mathcal{G}, M)$



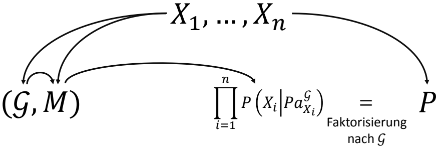
# Bayes-Netz

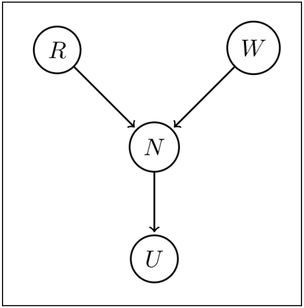
$$X_1, \dots, X_n$$

$$(\mathcal{G}, M) \qquad \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \middle| Pa_{X_i}^{\mathcal{G}}\right) \underset{\text{Faktorisierung nach } \mathcal{G}}{=} P$$



# Bayes-Netz




## Bayes-Netz

Ein *Bayes-Netz* über $X_1, \ldots, X_n$ ist das geordnete Paar $(\mathcal{G}, M)$.

- $\mathcal{G}$ ist ein gerichteter azyklischer Graph über $X_1, \ldots, X_n$ (DAG).
- $M = \{P(X_i | Pa_{X_i}^{\mathcal{G}}) | i = 1, \ldots, n\}$

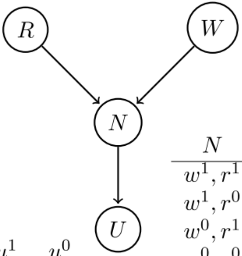
Damit einher geht die Annahme, dass sich $P$ nach $\mathcal{G}$ faktorisieren lässt.

# Beispiel

- (R) Es regnet
- (W) Es gibt einen Wasserschaden durch einen Rohrbruch
- (N) Der Weg ist nass
- (U) Auf dem Weg passiert ein Unfall

| $R$ | $r^1$ | $r^0$ |
|---|---|---|
| | 0.3 | 0.7 |

| $W$ | $w^1$ | $w^0$ |
|---|---|---|
| | 0.05 | 0.95 |

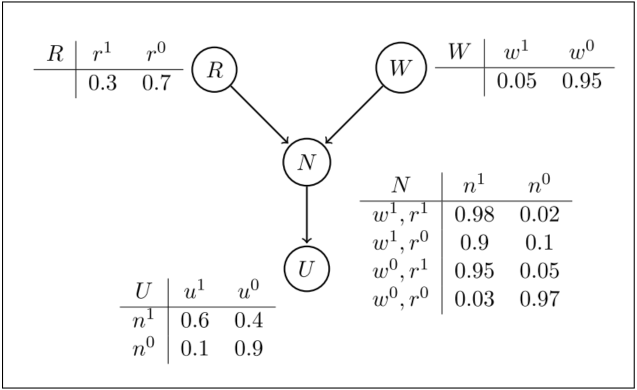



| $N$ | $n^1$ | $n^0$ |
|---|---|---|
| $w^1, r^1$ | 0.98 | 0.02 |
| $w^1, r^0$ | 0.9 | 0.1 |
| $w^0, r^1$ | 0.95 | 0.05 |
| $w^0, r^0$ | 0.03 | 0.97 |

| $U$ | $u^1$ | $u^0$ |
|---|---|---|
| $n^1$ | 0.6 | 0.4 |
| $n^0$ | 0.1 | 0.9 |

# Beispiel

- (R) Es regnet
- (W) Es gibt einen Wasserschaden durch einen Rohrbruch
- (N) Der Weg ist nass
- (U) Auf dem Weg passiert ein Unfall




| $R$ | $r^1$ | $r^0$ |
|---|---|---|
| | 0.3 | 0.7 |

| $W$ | $w^1$ | $w^0$ |
|---|---|---|
| | 0.05 | 0.95 |

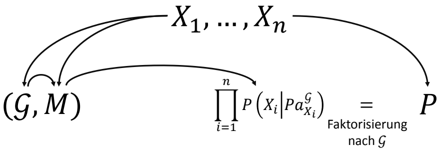
| $N$ | $n^1$ | $n^0$ |
|---|---|---|
| $w^1, r^1$ | 0.98 | 0.02 |
| $w^1, r^0$ | 0.9 | 0.1 |
| $w^0, r^1$ | 0.95 | 0.05 |
| $w^0, r^0$ | 0.03 | 0.97 |

| $U$ | $u^1$ | $u^0$ |
|---|---|---|
| $n^1$ | 0.6 | 0.4 |
| $n^0$ | 0.1 | 0.9 |

## Beispiel

$$P(w^0, r^1, n^1, u^0) = P(r^1) \cdot P(w^0) \cdot P(n^1|w^0, r^1) \cdot P(u^0|n^1)$$
$$= 0.3 \cdot 0.95 \cdot 0.95 \cdot 0.4 = 0.1083$$

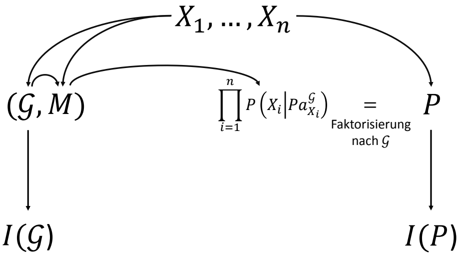
# Abhängigkeitsmodell




## Abhängigkeitsmodell

Eine *Unabhängigkeitsaussage* $(X \perp Y | Z)$ bedeutet „$X$ ist unabhängig von $Y$ gegeben $Z$“.
Eine Menge $I$ an Unabhängigkeitsaussagen innerhalb $X_1, \dots, X_n$ bezeichnet man als *Abhängigkeitsmodell* über $X_1, \dots, X_n$.

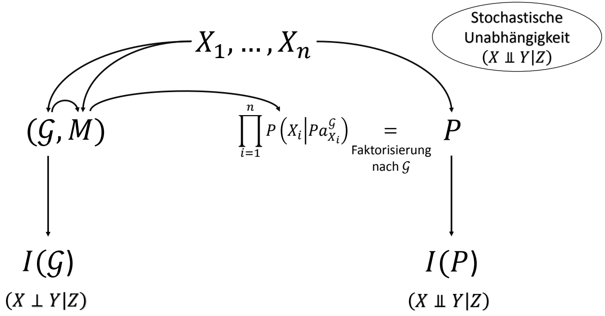
# Abhängigkeitsmodell




## Abhängigkeitsmodell

Eine *Unabhängigkeitsaussage* $(X \perp Y | Z)$ bedeutet „$X$ ist unabhängig von $Y$ gegeben $Z$“.
Eine Menge $I$ an Unabhängigkeitsaussagen innerhalb $X_1, \dots, X_n$ bezeichnet man als *Abhängigkeitsmodell* über $X_1, \dots, X_n$.

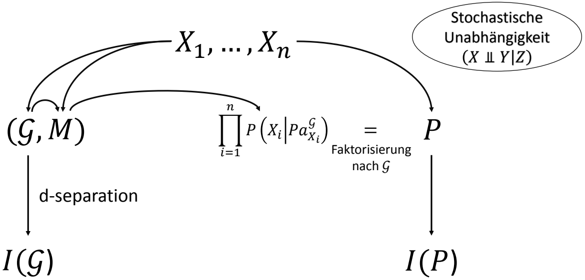
# Abhängigkeitsmodell




## Abhängigkeitsmodell

Eine *Unabhängigkeitsaussage* $(X \perp Y|Z)$ bedeutet „$X$ ist unabhängig von $Y$ gegeben $Z$“.
Eine Menge $I$ an Unabhängigkeitsaussagen innerhalb $X_1, \ldots, X_n$ bezeichnet man als *Abhängigkeitsmodell* über $X_1, \ldots, X_n$.

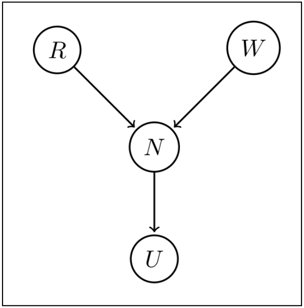
# d-separation



# Lokale Markov Unabhängigkeiten

## Markov Bedingung

In einem DAG sind alle Variablen bedingt unabhängig von ihren Nicht-Abkömmlingen und Nicht-Eltern gegeben ihre Eltern.



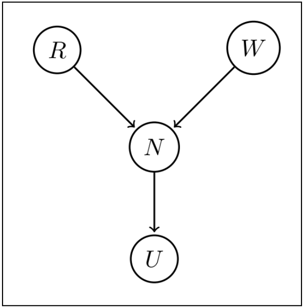

## Lokale Markov Unabhängigkeiten

Als *lokale (Markov) Unabhängigkeiten* $I_l(\mathcal{G})$ eines DAG $\mathcal{G}$ werden Unabhängigkeitsaussagen bezeichnet, die sich über die Markov-Bedingung von $\mathcal{G}$ ableiten lassen:

$$I_l(\mathcal{G}) = \{(X_i \perp NonDes^{\mathcal{G}}_{X_i} | Pa^{\mathcal{G}}_{X_i}) | i = 1, \ldots, n\}$$

# Lokale Markov Unabhängigkeiten

$$I_l(\mathcal{G}) = \{(W \perp R), (U \perp R|N), (U \perp W|N)\}$$



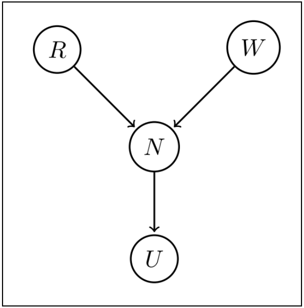

## Lokale Markov Unabhängigkeiten

Als *lokale (Markov) Unabhängigkeiten* $I_l(\mathcal{G})$ eines DAG $\mathcal{G}$ werden Unabhängigkeitsaussagen bezeichnet, die sich über die Markov-Bedingung von $\mathcal{G}$ ableiten lassen:

$$I_l(\mathcal{G}) = \{(X_i \perp NonDes^{\mathcal{G}}_{X_i} | Pa^{\mathcal{G}}_{X_i}) | i = 1, \ldots, n\}$$

# Aktiver Pfad

$I_l(\mathcal{G}) = \{(W \perp R), (U \perp R|N), (U \perp W|N)\}$




## Aktiver Pfad

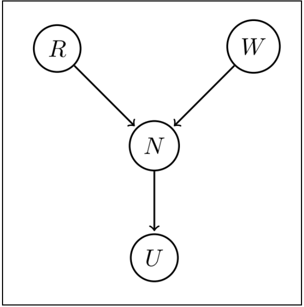
Der Pfad $X_1 \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows X_m$ in $\mathcal{G}$ heißt *aktiv* gegeben eine Teilmenge von beobachteten Variablen $Z$, wenn

- Für jede *v-Struktur* $X_{i-1} \rightarrow X_i \leftarrow X_{i+1}$ ist $X_i$ oder eine ihrer Nachkömmlinge in $Z$
- Jede Variable des Pfades, die nicht im Zentrum einer v-Struktur liegt, ist nicht in $Z$

# Aktiver Pfad

$$I_l(\mathcal{G}) = \{(W \perp R), (U \perp R|N), (U \perp W|N)\}$$

$W \rightarrow N \leftarrow R$ nicht aktiv (gegeben $\emptyset$)
$W \rightarrow N \leftarrow R$ aktiv gegeben $U$
$U \leftarrow N \leftarrow W$ nicht aktiv gegeben $N$
$U \leftarrow N \leftarrow W$ nicht aktiv gegeben $\{N, R\}$




## Aktiver Pfad

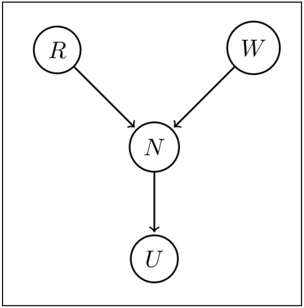
Der Pfad $X_1 \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows X_m$ in $\mathcal{G}$ heißt *aktiv* gegeben eine Teilmenge von beobachteten Variablen $Z$, wenn

- Für jede *v-Struktur* $X_{i-1} \rightarrow X_i \leftarrow X_{i+1}$ ist $X_i$ oder eine ihrer Nachkömmlinge in $Z$
- Jede Variable des Pfades, die nicht im Zentrum einer v-Struktur liegt, ist nicht in $Z$

# d-separation

$$I_l(\mathcal{G}) = \{(W \perp R), (U \perp R|N), (U \perp W|N)\}$$

$W \to N \leftarrow R$ nicht aktiv (gegeben $\emptyset$)
$W \to N \leftarrow R$ aktiv gegeben $U$
$U \leftarrow N \leftarrow W$ nicht aktiv gegeben $N$
$U \leftarrow N \leftarrow W$ nicht aktiv gegeben $\{N, R\}$

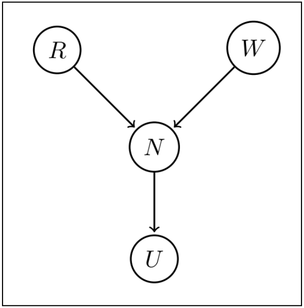



## d-separation

Zwei Variablen $X$ und $Y$ eines DAG $\mathcal{G}$ sind *d-separated* d-sep$_\mathcal{G}(X; Y|Z)$ gegeben eine Teilmenge an beobachteten Variablen $Z$, wenn es keinen aktiven Pfad zwischen $X$ und $Y$ gibt.

# d-separation

$$I_l(\mathcal{G}) = \{(W \perp R), (U \perp R|N), (U \perp W|N)\}$$




$W \to N \leftarrow R$ nicht aktiv (gegeben $\emptyset$)
$W \to N \leftarrow R$ aktiv gegeben $U$
$U \leftarrow N \leftarrow W$ nicht aktiv gegeben $N$
$U \leftarrow N \leftarrow W$ nicht aktiv gegeben $\{N, R\}$
$\Rightarrow$ d-sep$_{\mathcal{G}}(W; R|\emptyset)$
$\Rightarrow$ d-sep$_{\mathcal{G}}(U; W|N)$
$\Rightarrow$ d-sep$_{\mathcal{G}}(U; W|\{N, R\})$

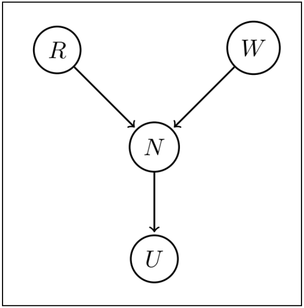
## d-separation

Zwei Variablen $X$ und $Y$ eines DAG $\mathcal{G}$ sind *d-separated* d-sep$_{\mathcal{G}}(X; Y|Z)$ gegeben eine Teilmenge an beobachteten Variablen $Z$, wenn es keinen aktiven Pfad zwischen $X$ und $Y$ gibt.

# Globale Markov Unabhängigkeiten

$$I_l(\mathcal{G}) = \{(W \perp R), (U \perp R|N), (U \perp W|N)\}$$

$W \rightarrow N \leftarrow R$ nicht aktiv (gegeben $\emptyset$)
$W \rightarrow N \leftarrow R$ aktiv gegeben $U$
$U \leftarrow N \leftarrow W$ nicht aktiv gegeben $N$
$U \leftarrow N \leftarrow W$ nicht aktiv gegeben $\{N, R\}$
$\Rightarrow$ d-sep$_\mathcal{G}(W; R|\emptyset)$
$\Rightarrow$ d-sep$_\mathcal{G}(U; W|N)$
$\Rightarrow$ d-sep$_\mathcal{G}(U; W|\{N, R\})$



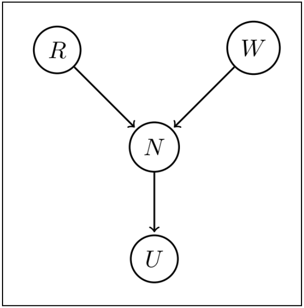

## Globale Markov Unabhängigkeiten

Als *globale Markov Unabhängigkeiten* $I(\mathcal{G})$ eines DAG $\mathcal{G}$ werden Unabhängigkeitsaussagen bezeichnet, die sich über die d-separation von $\mathcal{G}$ ableiten lassen:

$$I(\mathcal{G}) = \{(X \perp Y|Z) | \text{d-sep}_\mathcal{G}(X; Y|Z)\}$$

# Globale Markov Unabhängigkeiten

$$I_l(\mathcal{G}) = \{(W \perp R), (U \perp R|N), (U \perp W|N)\}$$




$\text{d-sep}_{\mathcal{G}}(U; W|\{N, R\})$
$\text{d-sep}_{\mathcal{G}}(U; R|\{N, W\})$

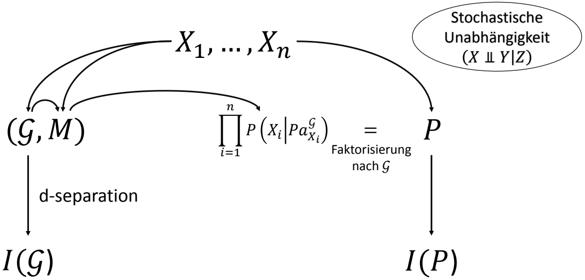
$$I(\mathcal{G}) = \{(W \perp R), (U \perp R|N), (U \perp W|N), (U \perp R|\{N, W\}), (U \perp W|\{N, R\})\}$$

## Globale Markov Unabhängigkeiten

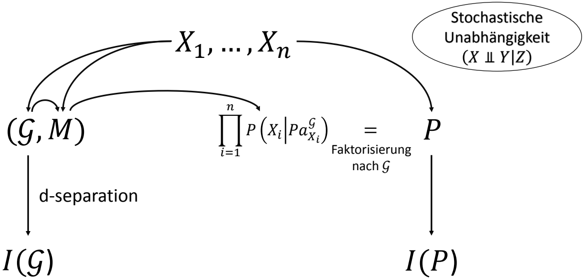
Als *globale Markov Unabhängigkeiten* $I(\mathcal{G})$ eines DAG $\mathcal{G}$ werden Unabhängigkeitsaussagen bezeichnet, die sich über die d-separation von $\mathcal{G}$ ableiten lassen:

$$I(\mathcal{G}) = \{(X \perp Y|Z) | \text{d-sep}_{\mathcal{G}}(X; Y|Z)\}$$

# d-separation



# I-Map, Perfect-Map




## I-Map, Perfect-Map

Seien $I$ und $I^*$ Abhängigkeitsmodelle.
$I^*$ ist *I-Map* von $I$, wenn $I^* \subset I$ gilt.
$I^*$ ist *Perfect-Map* von $I$, wenn $I^* = I$ gilt.
Falls $I^* = I(\mathcal{G})$ so ist auch $\mathcal{G}$ *I-Map* bzw. *Perfect-Map* von $I$.

# Semi-Graphoide

(A1) Symmetrie

$$(X \perp Y|Z) \Rightarrow (X \perp Y|Z)$$

(A2) Zerlegung

$$(X \perp Y \cup W|Z) \Rightarrow (X \perp Y|Z)$$

(A3) Schwache Vereinigung

$$(X \perp Y \cup W|Z) \Rightarrow (X \perp Y|Z \cup W)$$

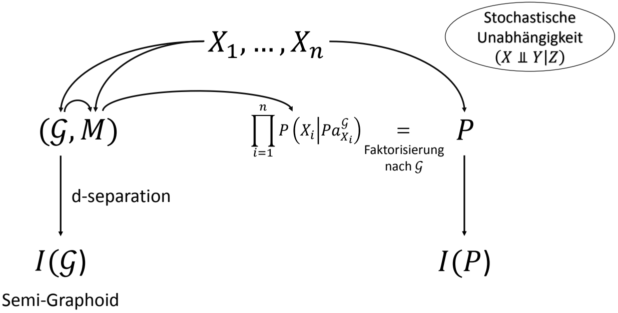
(A4) Kontraktion

$$(X \perp Y|Z) \wedge (X \perp W|Z \cup Y) \Rightarrow (X \perp Y \cup W|Z)$$

## Semi-Graphoide

Abhängigkeitsmodelle, in denen diese 4 Graph-Eigenschaften (A1) - (A4) gelten, werden *Semi-Graphoide* genannt.

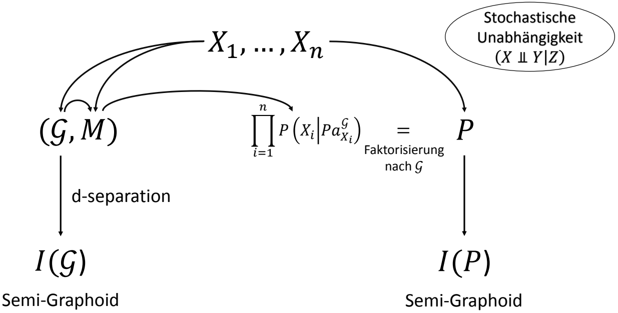
# Semi-Graphoide




## Satz

Zu jedem Semi-Graphoid ist es möglich, einen DAG $\mathcal{G}$ zu konstruieren, so dass dieser eine I-map des Semi-Graphoiden ist.

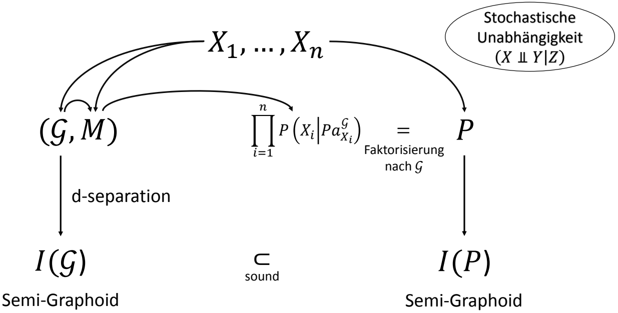
# Semi-Graphoide




## Satz

Ein Abhängigkeitsmodell $I(P)$, das bezüglich der stochastischen Unabhängigkeit aus einer gemeinsamen Verteilung $P$ gewonnen wird, erfüllt (A1) - (A4) und ist somit ein Semi-Graphoid.

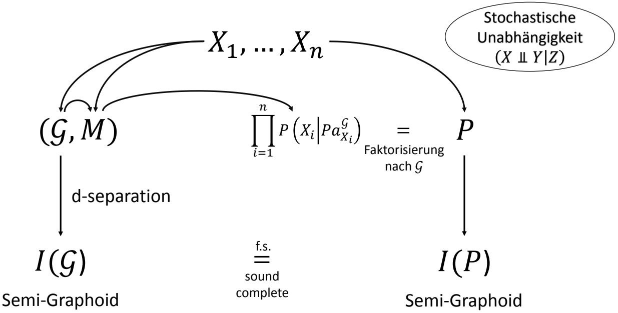
# Soundness der d-separation




## Satz: Soundness der d-separation

Wenn eine Verteilung $P(X_1, \ldots, X_n)$ über einen DAG $\mathcal{G}$ faktorisiert, dann gilt $I(\mathcal{G}) \subset I(P)$.

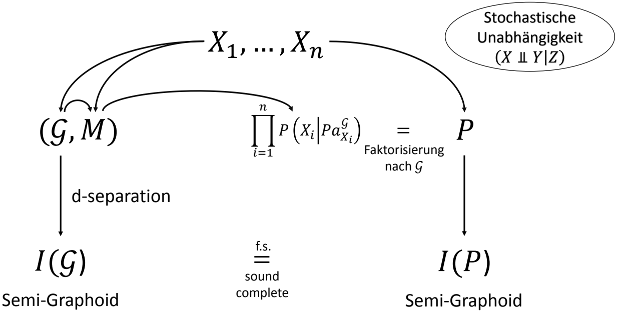
# Completeness der d-separation




**Satz: Completeness der d-separation**

Für fast alle Verteilungen $P(X_1, \dots, X_n)$, die über einen DAG $\mathcal{G}$ faktorisieren, gilt $I(\mathcal{G}) = I(P)$.

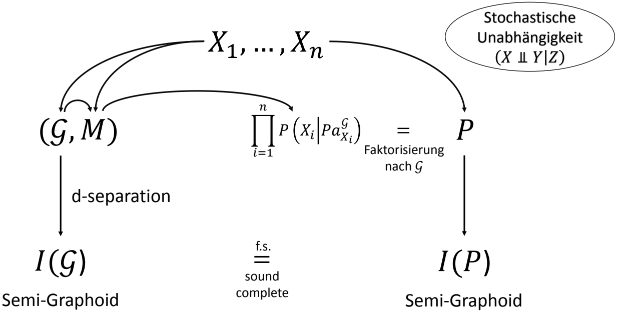
# Bayes-Netz




## Satz

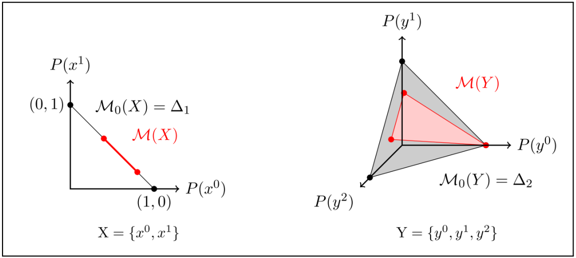
Wenn der DAG $\mathcal{G}$ eine I-Map von $I(P)$ ist, so lässt sich $P$ nach $\mathcal{G}$ faktorisieren.

# Ausblick



Stochastische Unabhängigkeit
$(X \perp\!\!\!\perp Y | Z)$
$X_1, \ldots, X_n$
$(\mathcal{G}, M)$
$\prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \middle| Pa_{X_i}^{\mathcal{G}}\right)$
=
Faktorisierung nach $\mathcal{G}$
$P$
d-separation
$I(\mathcal{G})$
Semi-Graphoid
f.s.
=
sound
complete
$I(P)$
Semi-Graphoid

# Kredal-Menge



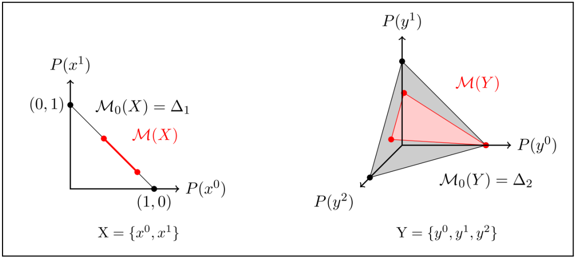

## Kredal-Menge

Eine *Kredal-Menge* über eine Zufallsvariable $X$ ist eine geschlossene, konvexe Menge $\mathcal{M}(X)$ an Verteilungen über $X$.

$$\mathcal{M}(X) = \{P(X)| \dots\}$$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ kann auch ein Vektor von Zufallsvariablen sein.

# Extremalpunkte




## Extremalpunkte

Als *Extremalpunkte* einer Kredal-Menge $\mathcal{M}(X)$ werden alle ihre Elemente $P(X)$ bezeichnet, die sich nicht als Linearkombination von anderen $P(X) \in \mathcal{M}(X)$ darstellen lassen.
$ext[\mathcal{M}(X)]$ bezeichnet die Menge aller Extremalpunkte von $\mathcal{M}(X)$.

# Bedingte Kredal-Menge

**Bedingte Kredal-Menge**

Eine *bedingte Kredal-Menge* über $X$ bedingt auf $Z$ ist

$$\mathcal{M}(X|Z) = \{\mathcal{M}(X|z)|z \in \mathrm{Z}\}$$

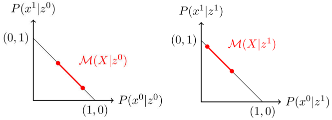
eine Menge an auf die einzelnen Ausprgungen von $Z$ bedingten Kredal-Mengen $\mathcal{M}(X|z)$.

# Bedingte Kredal-Menge

| $X$ | $Z$ | $X, Z$ |
| --- | --- | --- |
| $x \in \{x^0, x^1\}$ | $z \in \{z^0, z^1\}$ | $(x, z) \in \{(x^0, z^0), (x^1, z^0), (x^0, z^1), (x^1, z^1)\}$ |

$$\mathcal{M}(X, Z) \xrightarrow{\text{Bedingen}} \mathcal{M}(X|Z) = \{\mathcal{M}(X|z^0), \mathcal{M}(X|z^1)\}$$

Tetraeder in $\mathbb{R}^4$




## Bedingte Kredal-Menge

Eine *bedingte Kredal-Menge* über $X$ bedingt auf $Z$ ist

$$\mathcal{M}(X|Z) = \{\mathcal{M}(X|z) | z \in \mathrm{Z}\}$$

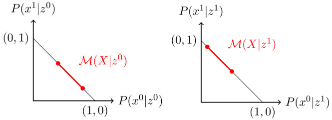
eine Menge an auf die einzelnen Ausprgungen von $Z$ bedingten Kredal-Mengen $\mathcal{M}(X|z)$.

# Bedingen

| $X$ | $Z$ | $X, Z$ |
|---|---|---|
| $x \in \{x^0, x^1\}$ | $z \in \{z^0, z^1\}$ | $(x, z) \in \{(x^0, z^0), (x^1, z^0), (x^0, z^1), (x^1, z^1)\}$ |

$$\mathcal{M}(X, Z) \xrightarrow{\text{Bedingen}} \mathcal{M}(X|Z) = \{\mathcal{M}(X|z^0), \mathcal{M}(X|z^1)\}$$

Tetraeder in $\mathbb{R}^4$




## Bedingen

$$\mathcal{M}(X|z) = CH \left\{ P(X|z) \;\middle|\; \begin{array}{l} P(x|z) := \frac{P(x,z)}{\sum_{x \in \mathrm{X}} P(x,z)}, \forall x \in \mathrm{X} \\ \forall P(X,Z) \in ext[\mathcal{M}(X,Z)] \end{array} \right\}$$

CH: Konvexe Hülle

# Bedingen

| $X$ | $Z$ | $X, Z$ |
|---|---|---|
| $x \in \{x^0, x^1\}$ | $z \in \{z^0, z^1\}$ | $(x, z) \in \{(x^0, z^0), (x^1, z^0), (x^0, z^1), (x^1, z^1)\}$ |

$$\mathcal{M}(X,Z) \xrightarrow{\text{Bedingen}} \begin{array}{c}\mathcal{M}(X|Z) = \\ \{\mathcal{M}(X|z^0), \mathcal{M}(X|z^1)\}\end{array}$$

$$\underbrace{\text{ext}[\mathcal{M}(X,Z)]}_{\begin{array}{c}P_1(X,Z)\\ P_2(X,Z)\\ P_3(X,Z)\end{array}}$$

## Bedingen

$$\mathcal{M}(X|z) = CH\left\{ P(X|z) \,\middle|\, \begin{array}{l} P(x|z) := \frac{P(x,z)}{\sum_{x \in \mathrm{X}} P(x,z)}, \forall x \in \mathrm{X} \\ \forall P(X,Z) \in ext[\mathcal{M}(X,Z)] \end{array} \right\}$$

CH: Konvexe Hülle

# Bedingen

| $X$ | $Z$ | $X, Z$ |
|---|---|---|
| $x \in \{x^0, x^1\}$ | $z \in \{z^0, z^1\}$ | $(x, z) \in \{(x^0, z^0), (x^1, z^0), (x^0, z^1), (x^1, z^1)\}$ |

$$\mathcal{M}(X, Z) \xrightarrow[\text{(Kredal-Menge)}]{\text{Bedingen}} \mathcal{M}(X|Z) = \{\mathcal{M}(X|z^0), \mathcal{M}(X|z^1)\}$$

$$\underbrace{\text{ext}[\mathcal{M}(X, Z)]}_{P_1(X,Z),\ P_2(X,Z),\ P_3(X,Z)}$$

Bedingen (Verteilung)

$$P_1(X, Z) \longrightarrow P_1(X|z^0),\ P_1(X|z^1)$$

$$P_2(X, Z) \longrightarrow P_2(X|z^0),\ P_2(X|z^1)$$

$$P_3(X, Z) \longrightarrow P_3(X|z^0),\ P_3(X|z^1)$$

## Bedingen

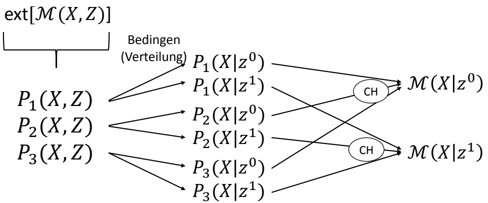
$$\mathcal{M}(X|z) = CH \left\{ P(X|z) \;\middle|\; \begin{array}{l} P(x|z) := \frac{P(x,z)}{\sum_{x \in \mathrm{X}} P(x,z)}, \forall x \in \mathrm{X} \\ \forall P(X, Z) \in ext[\mathcal{M}(X, Z)] \end{array} \right\}$$

CH: Konvexe Hülle

# Bedingen

| $X$ | $Z$ | $X,Z$ |
|---|---|---|
| $x \in \{x^0, x^1\}$ | $z \in \{z^0, z^1\}$ | $(x,z) \in \{(x^0,z^0),(x^1,z^0),(x^0,z^1),(x^1,z^1)\}$ |

$$\mathcal{M}(X,Z) \xrightarrow[\text{(Kredal-Menge)}]{\text{Bedingen}} \mathcal{M}(X|Z) = \{\mathcal{M}(X|z^0), \mathcal{M}(X|z^1)\}$$




## Bedingen

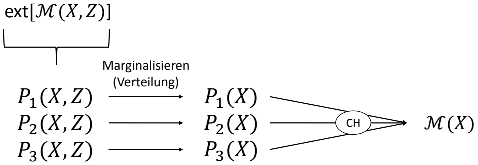
$$\mathcal{M}(X|z) = CH \left\{ P(X|z) \;\middle|\; \begin{array}{l} P(x|z) := \frac{P(x,z)}{\sum_{x \in \mathrm{X}} P(x,z)}, \forall x \in \mathrm{X} \\ \forall P(X,Z) \in ext[\mathcal{M}(X,Z)] \end{array} \right\}$$

CH: Konvexe Hülle

# Marginalisieren

| $X$ | $Z$ | $X, Z$ |
|---|---|---|
| $x \in \{x^0, x^1\}$ | $z \in \{z^0, z^1\}$ | $(x,z) \in \{(x^0,z^0),(x^1,z^0),(x^0,z^1),(x^1,z^1)\}$ |

$$\mathcal{M}(X,Z) \xrightarrow[\text{(Kredal-Menge)}]{\text{Marginalisieren}} \mathcal{M}(X)$$




## Marginalisieren

$$\mathcal{M}(X) = CH\left\{ P(X) \middle| \begin{array}{l} P(x) := \sum_{z \in \mathrm{Z}} P(x,z), \forall x \in \mathrm{X} \\ \forall P(X,Z) \in ext[\mathcal{M}(X,Z)] \end{array} \right\}$$

CH: Konvexe Hülle

# Komposition von Kredal-Mengen

| $X$<br>$x \in \{x^0, x^1\}$ | $Z$<br>$z \in \{z^0, z^1\}$ | | $X, Z$<br>$(x, z) \in \{(x^0, z^0), (x^1, z^0), (x^0, z^1), (x^1, z^1)\}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{M}(Z)$<br>$\mathcal{M}(X \vert z^0)$<br>$\mathcal{M}(X \vert z^1)$ | | $\xrightarrow{\text{Komposition}}$ | $\mathcal{M}(X, Z)$ |

## Komposition von Kredal-Mengen

$$\mathcal{M}(X, Z) = \mathcal{M}(X|Z) \otimes \mathcal{M}(Z)$$

$$:= CH \left\{ P(X, Z) \middle| \begin{array}{l} P(x, z) := P(x|z) \cdot P(z), \forall x \in \mathrm{X}, \forall z \in \mathrm{Z} \\ \forall P(Z) \in ext[\mathcal{M}(Z)], \\ \forall P(X|z) \in ext[\mathcal{M}(X|z)] \end{array} \right\}$$

# Komposition von Kredal-Mengen

| $X$ | $Z$ | $X,Z$ |
|---|---|---|
| $x \in \{x^0, x^1\}$ | $z \in \{z^0, z^1\}$ | $(x,z) \in \{(x^0,z^0),(x^1,z^0),(x^0,z^1),(x^1,z^1)\}$ |

$$\begin{matrix} \mathcal{M}(Z) \\ \mathcal{M}(X|z^0) \\ \mathcal{M}(X|z^1) \end{matrix} \xrightarrow{\text{Komposition}} \mathcal{M}(X,Z)$$

| | |
|---|---|
| ext$[\mathcal{M}(Z)]$ | $P_1(Z)$<br>$P_2(Z)$ |
| ext$[\mathcal{M}(X|z^0)]$ | $P_1(X|z^0)$<br>$P_2(X|z^0)$ |
| ext$[\mathcal{M}(X|z^1)]$ | $P_1(X|z^1)$<br>$P_2(X|z^1)$ |

## Komposition von Kredal-Mengen

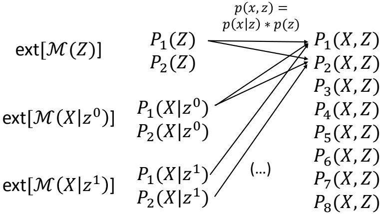
$$\mathcal{M}(X,Z) = \mathcal{M}(X|Z) \otimes \mathcal{M}(Z)$$

$$:= CH \left\{ P(X,Z) \middle| \begin{array}{l} P(x,z) := P(x|z) \cdot P(z), \forall x \in \mathrm{X}, \forall z \in \mathrm{Z} \\ \forall P(Z) \in ext[\mathcal{M}(Z)], \\ \forall P(X|z) \in ext[\mathcal{M}(X|z)] \end{array} \right\}$$

# Komposition von Kredal-Mengen

| $X$ | $Z$ | $X, Z$ |
|---|---|---|
| $x \in \{x^0, x^1\}$ | $z \in \{z^0, z^1\}$ | $(x,z) \in \{(x^0,z^0),(x^1,z^0),(x^0,z^1),(x^1,z^1)\}$ |

$\mathcal{M}(Z)$, $\mathcal{M}(X|z^0)$, $\mathcal{M}(X|z^1)$ $\xrightarrow{\text{Komposition}}$ $\mathcal{M}(X,Z)$




## Komposition von Kredal-Mengen

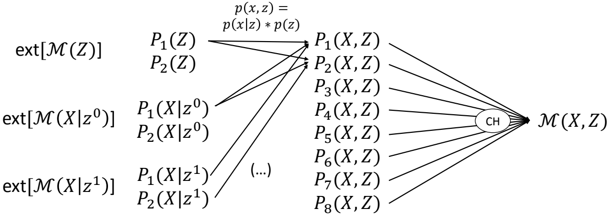
$$\mathcal{M}(X,Z) = \mathcal{M}(X|Z) \otimes \mathcal{M}(Z)$$

$$:= CH \left\{ P(X,Z) \middle| \begin{array}{l} P(x,z) := P(x|z) \cdot P(z), \forall x \in \mathbb{X}, \forall z \in \mathbb{Z} \\ \forall P(Z) \in ext[\mathcal{M}(Z)], \\ \forall P(X|z) \in ext[\mathcal{M}(X|z)] \end{array} \right\}$$

# Komposition von Kredal-Mengen

| $X$ | $Z$ | $X,Z$ |
|---|---|---|
| $x \in \{x^0, x^1\}$ | $z \in \{z^0, z^1\}$ | $(x,z) \in \{(x^0,z^0),(x^1,z^0),(x^0,z^1),(x^1,z^1)\}$ |

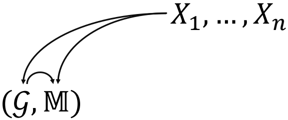
$$\begin{matrix}\mathcal{M}(Z)\\ \mathcal{M}(X|z^0)\\ \mathcal{M}(X|z^1)\end{matrix} \xrightarrow{\text{Komposition}} \mathcal{M}(X,Z)$$

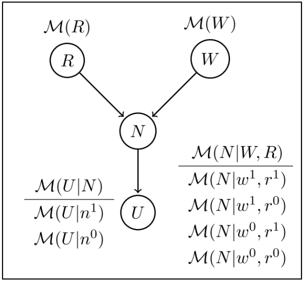



## Komposition von Kredal-Mengen

$$\mathcal{M}(X,Z) = \mathcal{M}(X|Z) \otimes \mathcal{M}(Z)$$

$$:= CH\left\{ P(X,Z) \;\middle|\; \begin{array}{l} P(x,z) := P(x|z)\cdot P(z), \forall x \in \mathrm{X}, \forall z \in \mathrm{Z} \\ \forall P(Z) \in ext[\mathcal{M}(Z)], \\ \forall P(X|z) \in ext[\mathcal{M}(X|z)] \end{array} \right\}$$



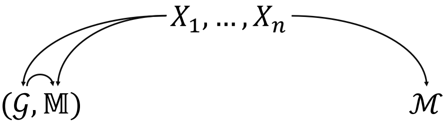



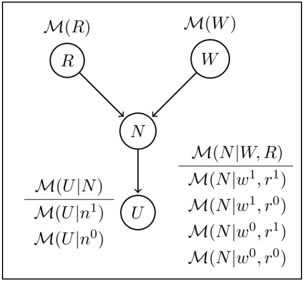

## Kredal-Netz

Ein *Kredal-Netz* über $X_1, \dots, X_n$ ist das geordnete Paar $(\mathcal{G}, \mathbb{M})$.

- $\mathcal{G}$ ist ein gerichteter azyklischer Graph über $X_1, \dots, X_n$ (DAG).
- $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}(X_i | Pa_{X_i}^{\mathcal{G}}) | i = 1, \dots, n\}$

# Kredal-Netz



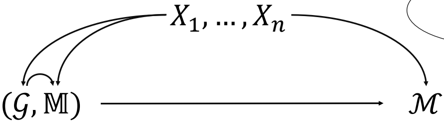



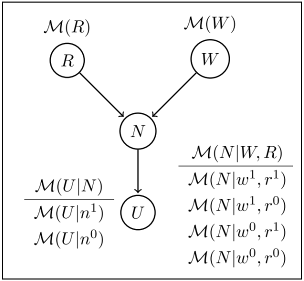

## Kredal-Netz

Ein *Kredal-Netz* über $X_1, \dots, X_n$ ist das geordnete Paar $(\mathcal{G}, \mathbb{M})$.

- $\mathcal{G}$ ist ein gerichteter azyklischer Graph über $X_1, \dots, X_n$ (DAG).
- $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}(X_i | Pa_{X_i}^{\mathcal{G}}) | i = 1, \dots, n\}$

# Kredal-Netz



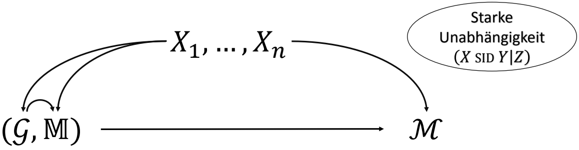



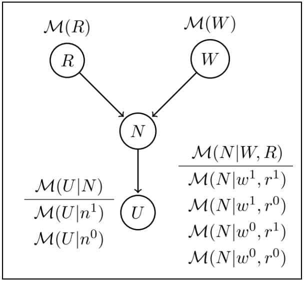

## Kredal-Netz

Ein *Kredal-Netz* über $X_1, \dots, X_n$ ist das geordnete Paar $(\mathcal{G}, \mathbb{M})$.

- $\mathcal{G}$ ist ein gerichteter azyklischer Graph über $X_1, \dots, X_n$ (DAG).
- $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}(X_i | Pa_{X_i}^{\mathcal{G}}) | i = 1, \dots, n\}$

# Starke Unabhängigkeit

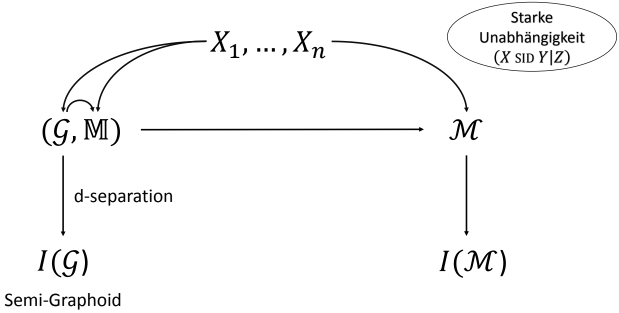


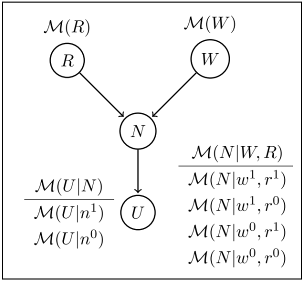




## Starke Unabhängigkeit

In $\mathcal{M}(X, Y, Z)$ sind $X$ und $Y$ *bedingt stark unabhängig* gegeben $Z$, wenn in jeder Extremalverteilung $P(X, Y, Z) \in ext[\mathcal{M}(X, Y, Z)]$ die bedingte stochastische Unabhängigkeit von $X$ und $Y$ gegeben $Z$ gilt.

$$(X \text{ SID } Y|Z) :\Leftrightarrow \forall P(X, Y, Z) \in ext[\mathcal{M}(X, Y, Z)] : (X \perp\!\!\!\perp Y|Z)$$



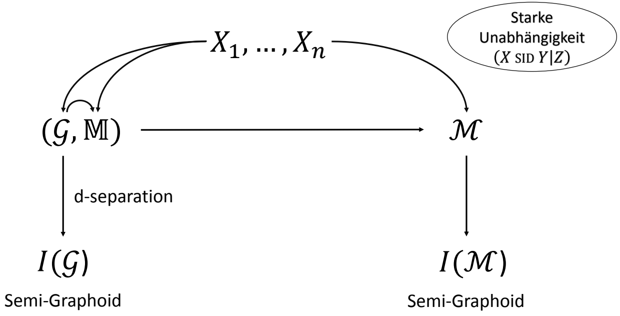



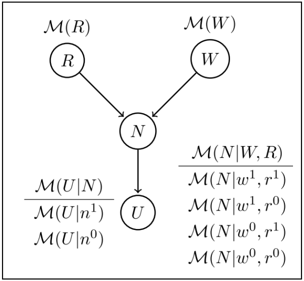

## Starke Unabhängigkeit

In $\mathcal{M}(X, Y, Z)$ sind $X$ und $Y$ *bedingt stark unabhängig* gegeben $Z$, wenn in jeder Extremalverteilung $P(X, Y, Z) \in ext[\mathcal{M}(X, Y, Z)]$ die bedingte stochastische Unabhängigkeit von $X$ und $Y$ gegeben $Z$ gilt.

$$(X \text{ SID } Y|Z) :\Leftrightarrow \forall P(X, Y, Z) \in ext[\mathcal{M}(X, Y, Z)] : (X \perp\!\!\!\perp Y|Z)$$

# Starke Unabhängigkeit

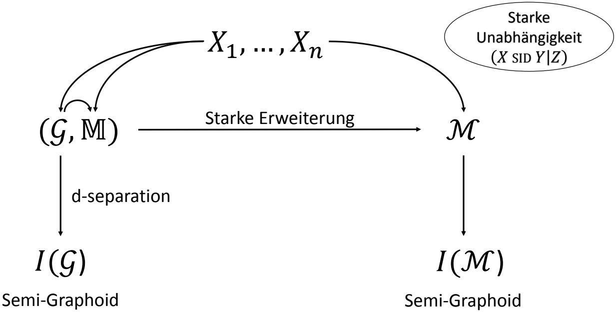


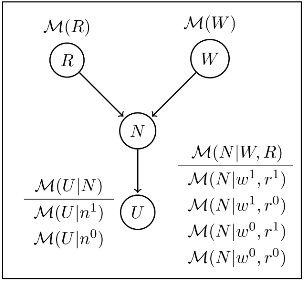




## Satz

Abhängigkeitsmodelle, die bezüglich der starken Unabhängigkeit aus einer gemeinsamen Kredal-Menge mit positiven unteren Wahrscheinlichkeiten gewonnen werden, erfüllen (A1) - (A4) und sind somit Semi-Graphoide.

# Starke Erweiterung



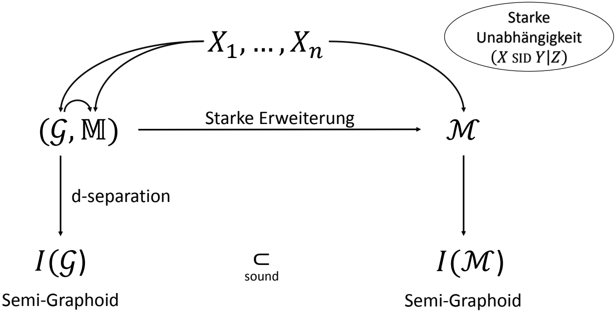



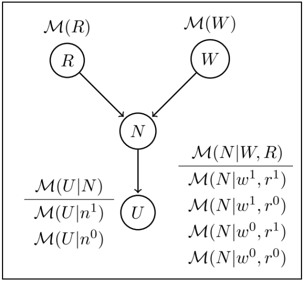

## Starke Erweiterung

Die *starke Erweiterung* eines Kredal-Netzes ist die größte gemeinsame Kredal-Menge $\mathcal{M}(X_1, \dots, X_n)$, die alle vom DAG $\mathcal{G}$ durch die Markov-Bedingung vorgegebenen Unabhängigkeiten als starke Unabhängigkeiten erfüllt.

Diese wird berechnet über $\mathcal{M}(X_1, \dots, X_n) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{M}(X_i | Pa^{\mathcal{G}}_{X_i})$.

# Soundness in der starken Erweiterung



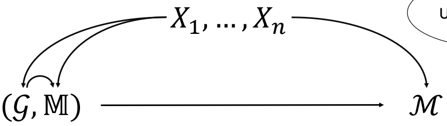




## Satz: Soundness der d-separation in der starken Erweiterung

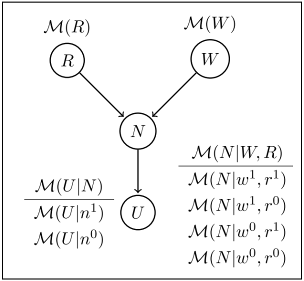
In einem Kredal-Netz $(\mathcal{G}, \mathbb{M})$ mit positiven unteren bedingten Wahrscheinlichkeiten ist jede Unabhängigkeitsaussage von $\mathcal{G}$ in der starken Erweiterung $\mathcal{M}(X_1, \dots, X_n)$ als starke Unabhängigkeit gültig:

$$I(\mathcal{M}(X_1, \dots, X_n)) \subset I(\mathcal{G})$$

# Epistemische Unabhängigkeit



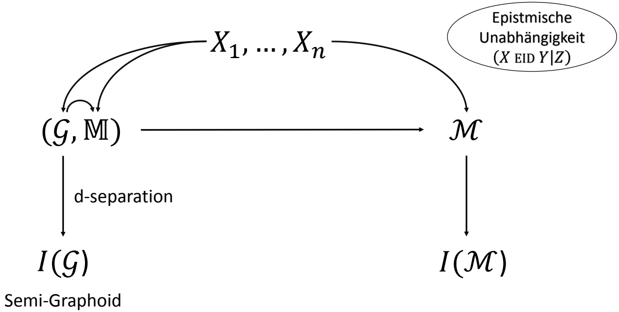

Epistmische Unabhängigkeit ($X$ EID $Y|Z$)

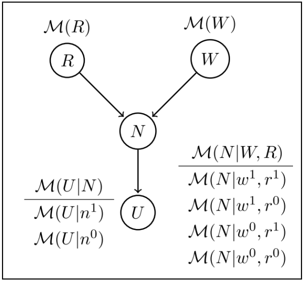



## Epistemische Unabhängigkeit

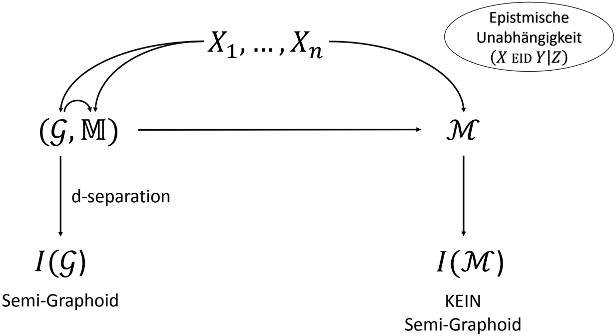
*siehe Vortrag von Tobias Steinherr*

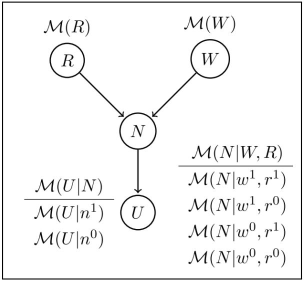
# Epistemische Unabhängigkeit



# Epistemische Unabhängigkeit

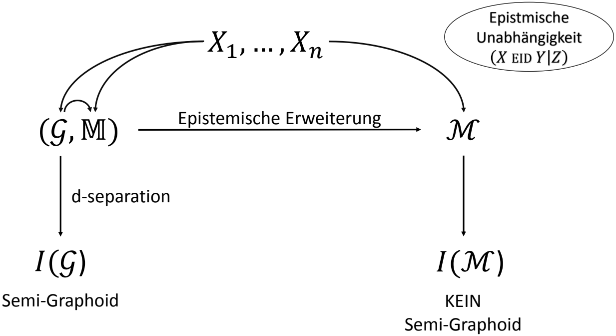


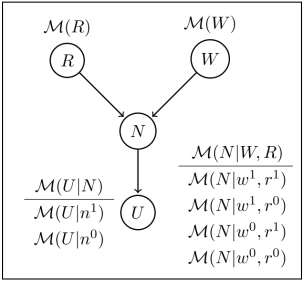




## Satz

In einem Abhängigkeitsmodell $I(\mathcal{M})$, das bezüglich der epistemischen Unabhängigkeit aus einer gemeinsamen Kredal-Menge $\mathcal{M}$ gewonnen wird, ist die Kontraktions-Eigenschaft (A4) nicht immer erfüllt.

# Epistemische Erweiterung

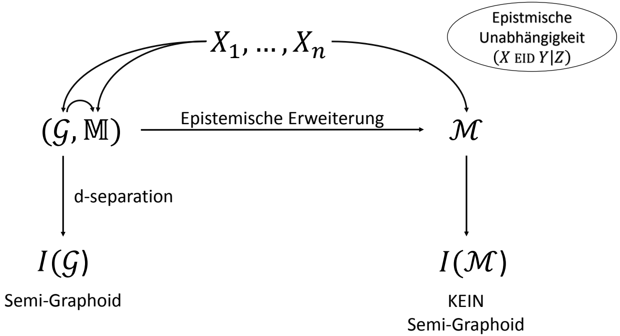


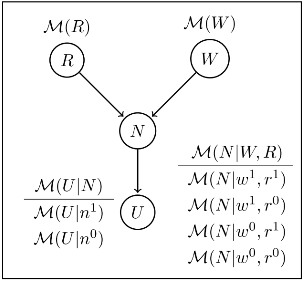




## Epistemische Erweiterung

Die *epistemische Erweiterung* eines Kredal-Netzes ist die größte gemeinsame Kredal-Menge $\mathcal{M}(X_1, \ldots, X_n)$, die alle vom DAG $\mathcal{G}$ durch die Markov-Bedingung vorgegebenen Unabhängigkeiten als epistemische Unabhängigkeiten erfüllt.

# Epistemische Erweiterung




## Epistemische Erweiterung

Die *epistemische Erweiterung* eines Kredal-Netzes ist die größte

## Satz

In nicht jeder epistemischen Erweiterung gilt:

$$I(\mathcal{G}) \subset I(\mathcal{M}(X_1, \dots, X_n))$$

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!

Referenzen: siehe Hausarbeit.