Aufgabe 20 (Lösen von linearen Gleichungssystemen)

Gegeben sei das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrcl} I.) & x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ II.) & -2x_1 & +x_2 & -6x_3 & = & 0 \\ III.) & x_1 & & -2x_3 & = & 3 \end{array}$$

a) Schreiben Sie das Gleichungssystem in Matrixnotation der Form $\mathbf{Ax}$=$\mathbf{c}$.

b) Welche *elementaren Matrixoperationen* können herangezogen werden, um die zugrundeliegende Matrix $\mathbf{A}$ auf Dreiecksgestalt zu reduzieren?

c) Lösen Sie das Gleichungssystem, indem Sie die Matrix $\mathbf{A}$ auf Dreiecksgestalt bringen.

Aufgabe 21 (Der Vorteil der Dreiecksgestalt)

Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & \frac{3}{5} & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

a) Wie nennt man das hier aufgeführte Gleichungssystem?

b) Nennen Sie Vorteile eines linearen Gleichungssystems mit Koeffizientenmatrix in Dreiecksgestalt? Gehen Sie dabei auch auf den hier vorliegenden Fall ein.

Aufgabe 22 (Lineare Unabhängigkeit)

Sind die folgenden drei Vektoren linear unabhängig?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$