Aufgabe 12 (Vektorraum)

Rekapitulieren Sie die Definition des Vektorraums, welche Sie in der Vorlesung kennengelernt haben, und überlegen Sie sich kurz warum es sich beim

$$\mathbb{R}^4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

tatsächlich um einen Vektorraum handelt.

Aufgabe 13 (Unterraum)

Ist die Gerade...

a) ... $g(x) = \frac{1}{2}x$

b) ... $h(x) = \frac{1}{3}x + 3$

ein Unterraum des $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 14 (Vektorraum, Unterraum)

Richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Sei V ein beliebiger Vektorraum. Dann ist die Menge U = $\{0\}$, die nur aus dem Nullvektor besteht, ein Unterraum von V .

b) Der Unterraum kann nicht die selbe Dimension besitzen wie der Vektorraum.

c) Der Durchschnitt zweier Unterräume U_1 und U_2 ist wieder ein Unterraum.

Aufgabe 15 (Wichtige Grundbegriffe)

Gegeben seien die folgenden drei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

b) Rekapitulieren Sie die folgenden Begriffe aus der Vorlesung:
   - Erzeugendensystem
   - Basis
   - Dimension eines Vektorraums

c) Erkären Sie, warum die hier angegebenen Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ darstellen.

d) Schlagen Sie eine weitere mögliche Basis des $\mathbb{R}^3$ vor.

e) Berechnen Sie den Koordinatenvektor von

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

sowohl bezüglich der von ihnen vorgeschlagenen Basis als auch bezüglich der Basis, welche durch die hier angegebenen Vektoren augespannt wird.

Aufgabe 16 (Lineare Unabhängigkeit und Basis)

Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Sind die beiden Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ linear unabhängig?

b) Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{z}$ so, dass die Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aufspannen.