Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Bedingte Erwartung einer Zufallsvariablen X, die mit Skalenparameter 1 Cauchy-verteilt ist, auf einer von den disjunkten Mengen $A, B \subset \Omega$ erzeugten σ-Algebra, wobei alle Elemente dieser σ-Algebra außer der leeren Menge keine Nullmengen sind.

Hinweis: Die Dichte von X für $x \in \mathbb{R}$ hat hier die folgende Gestalt

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2} \ .$$

Aufgabe 2

Stellen Sie ein Produktmaß $\lambda_1 \otimes \lambda_2$ auf einem Produktmessraum $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ als gemeinsame Verteilung bezüglich eines Markov-Kerns und eines Wahrscheinlichkeitsmaßes dar, wobei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \lambda_i)$ für $i = 1, 2$ je ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

Aufgabe 3

Formulieren Sie mit Hilfe einer Likelihood einen Markov-Kern. Zeigen Sie für diesen die Eigenschaften eines Markov-Kerns. Gehen Sie von einer Normalverteilung mit bekannter fester Varianz und variabler Lage aus.

Aufgabe 4

Sei f eine Riemann - integrierbare und g eine stetig differenzierbare Funktion jeweils auf $[a; b]$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\int_a^b f \, dg \ = \ \int_a^b f g' \, dx \quad .$$

Die folgende Aufgabe ist hauptsächlich zum Selbststudium gedacht.

Aufgabe 5

Beweisen Sie zu Satz 10.9 die Teile (a) - (e).