Aufgabe 1

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $C \in \mathcal{A}$ und

$$\mathcal{C} \;=\; \sigma(C) \quad .$$

Was ist dann

$$\mathbb{E}\Big[X \,\Big|\, \mathcal{C}\Big]$$

für $X \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$?

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass $P(C) > 0$ für alle $C \in \mathcal{C}$ gilt.

Aufgabe 2

Seien X und Y zwei reelle Zufallsvariablen, welche die 2-dimensionale um 0 zentrierte Normalverteilung $d\mathcal{N}_{\rho,\sigma^2} = f\, d\lambda^2$ mit $\rho \in (-1, 1)$ und mit $\sigma^2 > 0$ besitzen (gleichbedeutend mit $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2/(1-\rho^2)$):

$$f(x, y) := \frac{(1-\rho^2)^{1/2}}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\Big(x^2 - 2\rho xy + y^2\Big)\right)$$

Wie sieht die bedingte Dichtefunktion $f(x \,|\, y)$ aus? Beweisen Sie, dass

$$\mathbb{E}\Big[\, X \,\Big|\, Y \,\Big] = \rho Y \quad .$$

Aufgabe 3

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien

$$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \;\in\; \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(Y_i) = 0$. Setze

$$X_n = \sum_{j=1}^{n} Y_j \quad .$$

Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt:

$$\mathbb{E}_P\Big[X_n \,\Big|\, X_1, \ldots, X_{n-1}\Big] \;=\; X_{n-1} \quad P\text{-f.s.}$$