Aufgabe 1

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz 8.6. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Seien*

$$X_1 \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P), \quad X_2 \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P), \quad \ldots, \quad X_n \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

stochastisch unabhängige Zufallsvariablen. Dann ist

$$\mathbb{E}_P\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}_P\Big[X_i\Big] \tag{1}$$

und

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}\Big(X_i\Big) . \tag{2}$$

Aufgabe 2

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei P_i ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit Lebesgue-Dichte f_i. Dann ist

$$f \;:\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n)$$

eine Lebesgue-Dichte von $P_1 \otimes \cdots \otimes P_n$ auf $\mathbb{R}^n$, das heißt

$$d\Big(P_1 \otimes \cdots \otimes P_n\Big) = f\, d\lambda^n .$$

Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Aussage.

Aufgabe 3

Man betrachte die beiden Maßräume $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, wobei $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathfrak{B}$, $\mu_1 = \lambda$ und μ_2 ein nicht σ-endliches Zählmaß auf $\mathfrak{B}$ ist. In diesem Fall hier ist μ_2 definiert als

$$\mu_2(A) \longmapsto \begin{cases} |A| & \text{falls } A \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige, dass für die Diagonale $D = \{(\omega_1, \omega_2) \,|\, \omega_1 = \omega_2\}$ von $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \Omega_1 \times \Omega_2$ die Gleichheit

$$\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} I_D(\omega_1, \omega_2)\, \mu_2(d\omega_2)\mu_1(d\omega_1) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} I_D(\omega_1, \omega_2)\, \mu_1(d\omega_1)\mu_2(d\omega_2)$$

nicht gilt.