Aufgabe 1

Sei $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ ein Messraum und eine messbare Funktion $F\ :\ x \mapsto F(x)$ mit

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{16}x^2 & 0 \le x < 1 \\ -\frac{1}{16}(x-3)^2 + \frac{1}{2} & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{4}x & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

Sei P das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit Verteilungsfunktion F, d.h. $F(x) = P((-\infty, x]))$. Sei δ_z, das Dirac-Maß für die Stelle $z \in \mathbb{R}$

a) Bestimmen Sie die Dichte von P bzgl. $\mu_1 = \lambda + \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$.

b) Bestimmen Sie die Dichte von P bzgl. $\mu_2 = \lambda + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$.

c) Sind die zu μ_1 und μ_2 gehörenden Dichten aus a) und b) P - f.s. gleich? Begründen Sie.

Aufgabe 2

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ mit $\mu_x = \mathbb{E}(X) = 0$. Leiten Sie die Dichte der Zufallsvariablen $Y = |X|$ her.

Hinweis: Die Dichte einer normalverteilten Zufallsvariablen X ist

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) .$$

Aufgabe 3

Seien μ, ν zwei Maße auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume, wobei μ_1 und μ_2 σ-endlich sind. Es gelte

$$\mu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

und

$$\nu(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$$

für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Zeigen Sie mit Hilfe des Eindeutigkeitssatzes (Satz 3.9), dass

$$\mu = \nu$$

Die folgende Aufgabe ist hauptsächlich zum Selbststudium gedacht.

Aufgabe 4

Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega_1', \mathcal{A}_1')$, $(\Omega_2', \mathcal{A}_2')$ Messräume. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Sei

$$X_1 \;:\; \Omega \;\to\; \Omega_1'$$

eine $\mathcal{A}/\mathcal{A}_1'$ - messbare Zufallsvariable und sei

$$X_2 \;:\; \Omega \;\to\; \Omega_2'$$

eine $\mathcal{A}/\mathcal{A}_2'$ - messbare Zufallsvariable. Setze

$$X \;:\; \Omega \;\to\; \Omega_1' \times \Omega_2', \quad \omega \;\mapsto\; \Big(X_1(\omega), X_2(\omega)\Big)$$

Dann gilt: X_1 und X_2 sind stochastisch unabhängig, genau dann wenn

$$X(P) \;=\; \Big[X_1(P)\Big] \otimes \Big[X_2(P)\Big]$$