Aufgabe 1

Sei $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\sharp$ das Zählmaß hierauf. Beweisen Sie, dass in diesem Fall gilt:

a) Für jede nichtnegative Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ ist

$$\int f \, d\sharp = \sum_{i=1}^{\infty} f(i) \qquad .$$

b) Für jedes Maß ν auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ gilt

$$\nu \ll \sharp \qquad .$$

c) Für jedes σ-endliche Maß ν auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ ist die Dichte von ν bzgl. $\sharp$ gegeben durch

$$i \mapsto \nu(\{i\})$$

d) Für jedes σ-endliche Maß ν auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ und jede ν-messbare nichtnegative Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ ist

$$\int g \, d\nu = \sum_{i=1}^{\infty} g(i) \cdot \nu(\{i\}) \qquad .$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass alle Wahrscheinlichkeitsmaße P auf $(\{1, \ldots, n\}, \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}))$ von der Form

$$P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_k \ , \qquad \alpha_k \in [0,1] \ \forall k \in \{1, \ldots, n\} \ , \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$$

sind, wobei δ_k jeweils das Dirac-Maß an der Stelle k ist.

Aufgabe 3

Betrachtet wird der Maßraum $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}^{\otimes 2}, \lambda^2)$. Gegeben ist eine messbare Funktion ϕ mit

$$\phi : \ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ \to \ \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \exp(x+y) \end{pmatrix} \ .$$

Bestimmen Sie das Bildmaß $\phi(\lambda^2)$

Die folgende Aufgabe ist hauptsächlich zum Selbststudium gedacht.

Aufgabe 4

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz 7.1. *Sei* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *eine* $\mathcal{A}$*-messbare Funktionen mit* $f(\omega) \geq 0$ *für alle* $\omega \in \Omega$*. Dann wird durch* $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $A \mapsto \int_A f\, d\mu$ *ein Maß* ν *auf* $(\Omega, \mathcal{A})$ *definiert.*

Für

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{A}$$

schreiben wir auch $d\nu = f\, d\mu$*. Falls* $d\nu = f\, d\mu$*, so gilt auch*

$$\int g\, d\nu = \int gf\, d\mu \qquad \forall g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$$