Aufgabe 1

Auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ sei die reelle Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-messbar. Ist dann auch $\sin f$, d.h. die Funktion $\omega \mapsto \sin f(\omega)$, $\mathcal{A}$-messbar?

Aufgabe 2

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei $\mathcal{A}$-messbare Funktionen. Man zeige, dass die Teilmengen von Ω, die in den Gleichungen

$$\mu\Big(\{\omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}\Big) = 0$$

und

$$\mu\Big(\{\omega \mid f(\omega) > g(\omega)\}\Big) = 0$$

auftreten, tatsächlich in $\mathcal{A}$ liegen.

Aufgabe 3

Beweisen Sie Teil (b) des folgenden Satzes:

Satz 6.15. *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und $g : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei $\mathcal{A}$-messbare Funktionen. Es gilt:*

(a)

$$f \geq 0 \quad \text{und} \quad \int f \, d\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \quad \mu\text{-f.s.}$$

(b)

$$f = g \quad \mu\text{-f.s.} \Leftrightarrow \quad \int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}$$