Aufgabe 1

Beweisen Sie folgenden Satz:

Satz 4.1 (Eigenschaften von $\mathfrak{B}$)**.**

(i) $\emptyset \in \mathfrak{B}$, $\mathbb{R} \in \mathfrak{B}$

(ii) $\{c\} \in \mathfrak{B} \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

(iii) Für alle $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *ist*

$$[a,b] \in \mathfrak{B} \qquad [a,b) \in \mathfrak{B} \qquad (a,b] \in \mathfrak{B} \qquad (a,b) \in \mathfrak{B}$$

(iv) $\mathbb{N} \in \mathfrak{B}$, $\mathbb{Q} \in \mathfrak{B}$, $\mathbb{Q}^C \in \mathfrak{B}$

Natürlich sind auch jeweils die Komplemente, die (abzählbaren) Vereinigungen und die (abzählbaren) Durchschnitte all dieser Mengen in $\mathfrak{B}$.

Aufgabe 2

Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Für $A \subset \mathbb{N}$ bezeichne $\sharp(A)$ die Anzahl der Elemente in A. Man beweise, dass $\sharp$ ein σ-endliches Maß auf $\big(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$ ist.

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgenden Satz:

Satz 4.7 (Translationsinvarianz)**.** *Sei* $B \in \mathfrak{B}$, $c \in \mathbb{R}$ *und*

$$B_c \;:=\; c + B \;=\; \Big\{c + b \;:\; b \in B\Big\}.$$

Dann ist

$$\lambda(B_c) = \lambda(B)\,.$$

Aufgabe 4

Betrachte den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \mu)$ mit $\mu(A) = 0$ wenn A abzählbar und $\mu(A) = 1$ wenn A^C abzählbar ist.

Für $\Omega' = \{0,1\}$ und $\mathcal{A}' = \mathcal{P}(\Omega')$ wird die Abbildung $T : \mathbb{R} \to \Omega'$ definiert durch

$$T(\omega) := \begin{cases} 0, & \text{falls } \omega \text{ rational;} \\ 1, & \text{falls } \omega \text{ irrational.} \end{cases}$$

Man zeige, dass T $\mathfrak{B}/\mathcal{A}'$-messbar ist, und bestimme das Bildmaß $T(\mu)$.

Die folgende Aufgabe ist hauptsächlich zum Selbststudium gedacht.

Aufgabe 5

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ_1 und μ_2 zwei Maße darauf, so dass $\mu_1(A) \leq \mu_2(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ sei.

Zeigen Sie, dass wenn $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega) < \infty$ gilt, dann ist $\mu_1 = \mu_2$.