

Aufgabe 1

Sind Ω_1, Ω_2 Mengen und ist $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ eine Abbildung, so bezeichnet man für $A \subset \Omega_1$ mit

$$f(A) := \{f(\omega) : \omega \in A\}$$

das *Bild* von A unter der Abbildung f und mit

$$f^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega_1 : f(\omega) \in B\}$$

das *Urbild* von $B \subset \Omega_2$. Sei I eine Indexmenge und $B, B_i \subset \Omega_2, i \in I$ beliebige Teilmengen. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Relationen

a)

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i),$$

b)

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i),$$

c)

$$f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c.$$

Aufgabe 2

Seien Ω_1, Ω_2 Mengen und $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ eine Abbildung und \mathcal{A}_i eine σ -Algebra auf $\Omega_i, i = 1, 2$. Zeigen Sie

a) $f(\mathcal{A}_1) := \{B \subset \mathcal{A}_2 : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$ ist eine σ -Algebra auf Ω_2 ,

b) $f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{A}_2\}$ ist eine σ -Algebra auf Ω_1 .

Aufgabe 3

Man beweise, dass das *Dirac-Maß* auf einem Messraum (Ω, \mathcal{A}) ein Maß ist.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{A}_n := \sigma(\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \{\Omega\}\})$ eine σ -Algebra auf einer nichtabzählbaren Menge Ω (zum Beispiel \mathbb{R}). Man beweise, dass

$$\mu : \mathcal{A}_n \rightarrow [0; \infty]$$
$$A \mapsto \begin{cases} 0, & A \text{ abzählbar,} \\ 1, & A^c \text{ abzählbar} \end{cases}$$

ein Maß auf (Ω, \mathcal{A}_n) ist.

Die folgende Aufgabe ist hauptsächlich zum Selbststudium gedacht.

Aufgabe 5

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Man beweise folgende Eigenschaften von Maßen:

- (a) *Endliche Additivität:* Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien $A_1 \in \mathcal{A}, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ so dass $A_i \cap A_j = \emptyset$ (für $i \neq j$). Dann ist

$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n)$$

- (b) *Isotonie:*

$$A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}, A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B)$$

- (c) *Subtraktivität:*

$$A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{A}, A \subset B, \mu(A) < \infty \quad \Rightarrow \quad \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

- (d) *Sub-Additivität:*

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

- (f) *Stetigkeit von oben:* Sei

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}; \quad A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathcal{A}$$

wobei $\mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$