Aufgabe 1

a) Seien A und B zwei beliebige, aber nicht gleichelementige Teilmengen einer Menge Ω. Stellen Sie die folgenden Mengen in aussagenlogischer Notation dar:
   i) die Menge A und ihr Komplement A^C,
   ii) der (Durch-)Schnitt von A und B,
   iii) die Vereinigung von A und B,
   iv) die Differenz von A und B,
   v) das reelle Intervall von 0 bis 1, inklusive der Intervallgrenzen.

b) Sei I eine Indexmenge und $A_i \subset \Omega$ für $i \in I$. Zeigen Sie in aussagenlogischen Notation die Gültigkeit der de Morganschen Regeln:

$$\bigcup_{i\in I} A_i^C = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^C \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i^C = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^C$$

Aufgabe 2

Sind folgende Systeme von Mengen aus Ω σ-Algebren von Ω?

a) $\mathcal{P}(\Omega)$ mit $\Omega = \mathbb{N}$
b) System aller Mengen $A \subset \Omega$, für welche A oder A^C abzählbar ist; $\Omega = \mathbb{R}$
c) Sei der Ereignisraum $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ gegeben. Ist $\mathcal{F} = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \Omega\Big\}$ eine σ-Algebra?
d) Zeigen Sie anhand eines Beispieles für $\Omega = \{a, b, c\}$, dass $\mathcal{H} = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$, die Vereinigung zweier σ-Algebren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ über Ω nicht unbedingt wieder eine σ-Algebra ist.

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung:

Satz 2.10 (Durchschnitt von σ-Algebren).
Sei Ω eine Menge, sei I eine Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $\mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf Ω. Dann ist auch

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i := \{A \subset \Omega \mid A \in \mathcal{A}_i \ \forall i \in I\}$$

eine σ-Algebra auf Ω.

Aufgabe 4

Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathcal{A}_n$ die von System $\mathcal{E}$ der Mengen $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$ und $\Omega := \mathbb{N}$ erzeugte σ-Algebra.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_n$ aus allen Mengen $A \subset \mathbb{N}$ besteht, welche entweder $A \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ oder $m \in A$ für alle $m \geq n + 1$ erfüllen.
b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$ ist.