Dieses Blatt dient zur Vorbereitung auf die Veranstaltung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie. Der Fokus liegt dabei weniger auf dem Inhalt als vielmehr auf der zugrunde liegenden Technik.

Dem Inhalt liegen Aspekte aus den Kapiteln 1, 4 und 7 aus O. Forster (2011): *Analysis 1*, Vieweg+Teubner Verlag zugrunde.

Aufgabe 1

Schreiben Sie die folgenden Sätze soweit es geht in mathematischer Notation:

a) Eine reelle Zahl X heißt Grenzwert einer reellen Folge (X_n), genau dann wenn es zu jeder positive reelle Zahl ε ein Folgenglied gibt, so dass ab diesem alle betragsmäßigen Abweichung zwischen den darauf folgenden Folgengliedern und X kleiner als ε sind.

b) Eine reelle Zahl h heißt Häufungspunkt einer reellen Folge (X_n), genau dann wenn es für jede positive Zahl ε und es zu jeder natürlichen Zahlen n eine mindestens ebenso große natürliche Zahl m gibt, so dass die betragsmäßigen Abweichungen des Folgengliedes X_m von h kleiner als ε sind.

Aufgabe 2

Schreiben Sie in eigenen Worten, was die Mengen charakterisiert.

a) $\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = |y|\big\}$

b) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben: $\big\{x \in \mathbb{R} : |a - x| < \varepsilon\big\}$

c) $\Big\{y \in \mathbb{R} : y = \max\big(|\cos(x)|, |\sin(x)|\big),\ \forall x \in \mathbb{R}\Big\}$

Aufgabe 3

Beweisen Sie mittels *Vollständiger Induktion* für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \ .$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie die mit Hilfe des Majoranten-Kriteriums die folgende Behauptung:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $|a_n| \leq M$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert die Reihe

$$r(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \ .$$