

# Rasch-Modelle und Verallgemeinerung

Seminar: Ausgewählte Aspekte der Wirtschafts- und Sozialstatistik

Nataliia Semenenko

Ludwig-Maximillan-Universität München  
Institut für Statistik

München, 22. Mai 2015

## 1 Einleitung

## 2 Grundform des Rasch-Modells

- Daten
- Modellgleichung
- Aufgaben- und Personencharakteristische Kurven
- Modellannahmen und Modelleigenschaften
- Parameterschätzung

## 3 Verallgemeinerungen des Rasch-Modells

- Das linear-logistische Testmodell
- Birnbaum-Modelle
- Das Partial-Credit-Modell
- weitere Verallgemeinerungen

# Inhaltsverzeichnis II

- 4 Modellgeltungstests
  - Der Graphische Modelltest
  - Likelihood-Quotienten-Test
  - Wald-Test
  
- 5 Zusammenfassung
  
- 6 Anhang I
  
- 7 Anhang II

## Das Rasch-Modell:

- wurde von dänischen Statistiker Georg Rasch entwickelt (1960)
- das Grundmodell aller Modelle der *Item-Response-Theorie* (**IRT**)

## Ziel:

- beobachtete Reaktion durch die latente Eigenschaft zu erklären
- Schätzung der nicht beobachteten Eigenschaften

## Berühmtester Einsatz: PISA-Studie der OECD

# Grundform des Rasch-Modells

## Datendarstellung

$n$  - Anzahl Personen

$m$  - Anzahl Aufgaben

$u \in \{0,1\}$  - beobachtete Variable Aufgabe gelöst (1 = ja, 0 = nein)

Beispiel (für  $n = 7$ ,  $m = 7$ )

Person	Aufgabe						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	0	1	0	0	0
2	0	1	1	1	0	1	0
3	1	1	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	1	0
6	1	1	1	1	1	1	0
7	1	0	0	0	1	0	0

# Grundform des Rasch-Modells

## Datendarstellung

### Allgemeine Form

$i = 1, \dots, n$  - Laufindex für Personen, die an einem Test teilnehmen

$j = 1, \dots, m$  - Laufindex für Aufgaben im Test

$u_{i,j} \in \{0,1\}$  - beobachtete Variable Aufgabe gelöst (1 = ja, 0 = nein)  
Eintrag für die  $i$ -te Person und  $j$ -te Aufgabe

Person	Aufgabe						
	1	2	3	...	<b><math>j</math></b>	...	$m$
1	$u_{1,1}$	$u_{1,2}$	$u_{1,3}$	...	$u_{1,j}$	...	$u_{1,m}$
2	$u_{2,1}$	$u_{2,2}$			.		.
3	$u_{3,1}$		.		.		.
.	.			.	.		.
<b><math>i</math></b>	$u_{i,1}$	.	.	.	<b><math>u_{i,j}</math></b>		.
.						.	.
$n$	$u_{n,1}$	.	.	...	.	...	$u_{n,m}$

# Grundform des Rasch-Modells

## Modellgleichung

$\theta$  - Personen-Parameter, z.B. Fähigkeit einer Person

$\beta$  - Aufgaben-Parameter, z.B. Schwierigkeit einer Aufgabe

$U_{i,j} \in \{0,1\}$  - unbekannte Variable Aufgabe gelöst (1 = ja, 0 = nein)  
Eintrag für die i-te Person und j-te Aufgabe

$P(U_{i,j} = u_{i,j})$  - Lösungswahrscheinlichkeit.

### Forderungen

1. Lösungswahrscheinlichkeit abhängig von der Fähigkeit der Person  $\theta_i$
2. Lösungswahrscheinlichkeit abhängig von der Schwierigkeit der Aufgabe  $\beta_j$
3. positiver Zusammenhang zwischen der Personenfähigkeit und Lösungswahrscheinlichkeit
4.  $P(U_{i,j} = u_{i,j}) \in [0,1]$



# Grundform des Rasch-Modells

## Modellgleichung

### Forderungen

1. Lösungswahrscheinlichkeit abhängig von der Fähigkeit der Person  $\theta_i$
2. Lösungswahrscheinlichkeit abhängig von der Schwierigkeit der Aufgabe  $\beta_j$
3. positiver Zusammenhang zwischen der Personenfähigkeit und Lösungswahrscheinlichkeit
4.  $P(U_{i,j} = u_{i,j}) \in [0,1]$

### Rasch-Modell

$$P(U_{i,j} = 1 | \theta_i, \beta_j) = \frac{e^{\theta_i - \beta_j}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}}$$

### Logit Modell

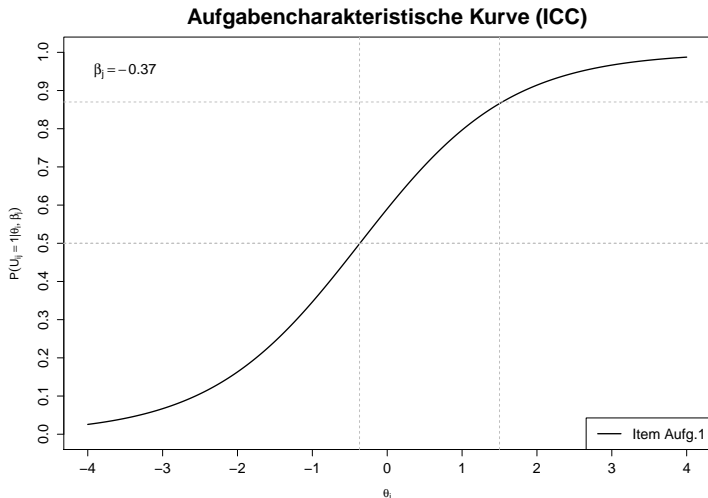
mit  $\zeta_i$  - der lineare Prädiktor

$$P(Y_i = 1) = \pi_i = \frac{e^{\zeta_i}}{1 + e^{\zeta_i}}$$

# Grundform des Rasch-Modells

## Aufgaben- und Personencharakteristische Kurven

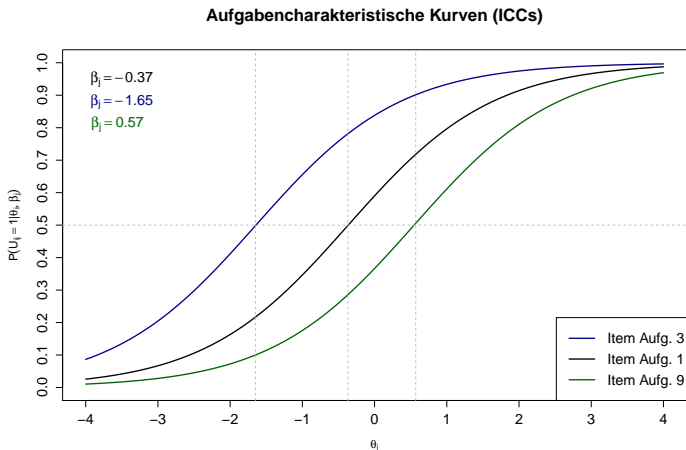
### ICC (*Item Characteristic Curve*)



# Grundform des Rasch-Modells

## Aufgaben- und Personencharakteristische Kurven

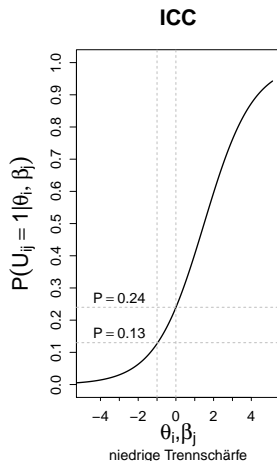
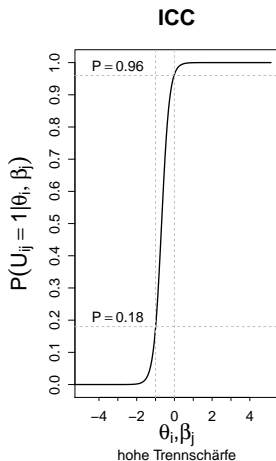
### ICCs (*Item Characteristic Curves*)



# Grundform des Rasch-Modells

## Aufgaben- und Personencharakteristische Kurven

### ICC (*Item Characteristic Curve*)



### Zentrale Annahmen und Eigenschaften

- Suffiziente Statistiken
- Lokale Stochastische Unabhängigkeit
- Spezifische Objektivität
- Eindimensionalität

# Grundform des Rasch-Modells

## Parameterschätzung

**Ziel:** Alle unbekannte Parameter ( $\theta_i$  und  $\beta_j$ ) zu schätzen

**Methode:** Maximum-Likelihood-Schätzung

**Möglichkeiten:**

- $\theta_i$  und  $\beta_j$  gleichzeitig geschätzt (Gemeinsame ML-Schätzung)
- $\theta_i$  und  $\beta_j$  nacheinander geschätzt (Bedingte ML-Schätzung oder Marginale ML-Schätzung)

# Verallgemeinerungen des Rasch-Modells

## Das linear-logistische Testmodell (LLTM)

Die Aufgaben-Parameter sind als Linearkombination der Parameter für die Teilkompetenzen dargestellt:

$$\beta_j = \sum_l \omega_{j,l} \cdot \eta_l$$

mit

$l = 1, \dots, L$  - Laufindex für nötige Teilkompetenzen für eine Aufgabe

$\omega_{j,l} \in \{0,1\}$  - Gewicht, Teilkompetenz in der Aufgabe enthalten  
(1=ja, 0=nein)

$\eta_l$  - Schwierigkeit der Teilkompetenz

# Verallgemeinerungen des Rasch-Modells

## Das linear-logistische Testmodell (LLTM)

### Gewichtungstabelle

Aufgabe	Teilkompetenzen						
	1	2	3	...	<b>I</b>	...	L
1	$\omega_{1,1}$	$\omega_{1,2}$	$\omega_{1,3}$	...	$\omega_{1,j}$	...	$\omega_{1,L}$
2	$\omega_{2,1}$	$\omega_{2,2}$			.		.
3	$\omega_{3,1}$		.		.		.
.	.			.	.		.
<b>j</b>	$\omega_{j,1}$	.	.	.	$\omega_{j,I}$		.
.						.	.
m	$\omega_{m,1}$	.	.	...	.	...	$\omega_{m,L}$



# Verallgemeinerungen des Rasch-Modells

Das linear-logistische Testmodell (LLTM)

Beispiel (Gewichtungstabelle für 3 Aufgaben, 3 Teilkompetenzen )

<b>Aufgabe</b>	<b>Teilkompetenzen</b>		
	<i>Kommutativ- Gesetz</i>	<i>Assoziativ- Gesetz</i>	<i>Distributiv- Gesetz</i>
<i>1</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>1</i>
<i>2</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>0</i>
<i>3</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>1</i>

### Das zwei-parametrische Birnbaum-Modell (2PLM)

$\delta_j$  - Diskriminationsparameter, Steigung j-ter Aufgabe

**bisher:**  $\delta_j = 1$

**jetzt:**  $\delta_j \neq 1$

$$P(U_{i,j} = 1 | \theta_i, \beta_j, \delta_j) = \frac{e^{\delta_j(\theta_i - \beta_j)}}{1 + e^{\delta_j(\theta_i - \beta_j)}}$$

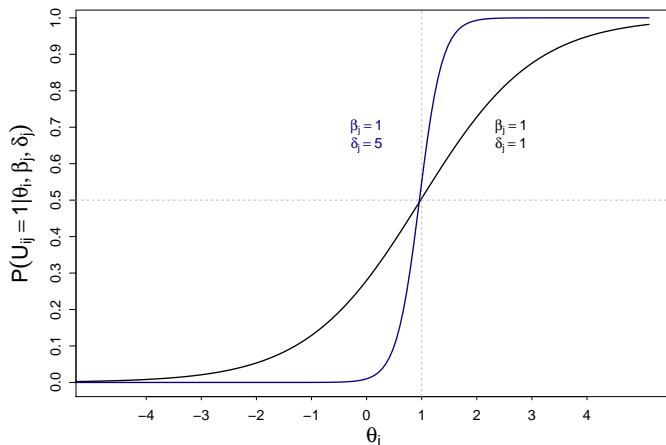
⇒ keine spezifische Objektivität

# Verallgemeinerungen des Rasch-Modells

## Birnbaum-Modelle

### Das zwei-parametrische Birnbaum-Modell (2PLM)

Aufgabencharakteristische Kurven (ICCs)



# Verallgemeinerungen des Rasch-Modells

## Birnbaum-Modelle

### Das Birnbaum-Modell mit zusätzlichem Rateparameter (3PLM)

$\delta_j$  - Steigung j-ter Aufgabe

$\gamma_j$  - Regulierungs-Parameter für Lösungswahrscheinlichkeiten

**bisher:**  $\gamma_j = 0$

**jetzt:**  $\gamma_j \neq 0$

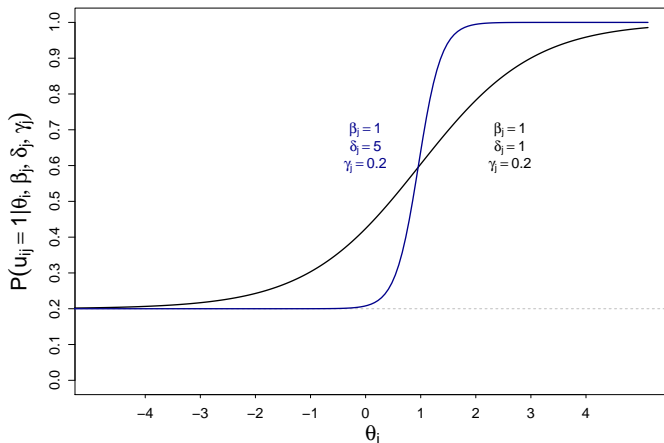
$$P(U_{i,j} = 1 | \theta_i, \beta_j, \delta_j, \gamma_j) = \gamma_j + (1 - \gamma_j) \cdot \frac{e^{\delta_j(\theta_i - \beta_j)}}{1 + e^{\delta_j(\theta_i - \beta_j)}}$$

# Verallgemeinerungen des Rasch-Modells

## Birnbaum-Modelle

### Das Birnbaum-Modell mit zusätzlichem Rateparameter (3PLM)

Aufgabencharakteristische Kurven (ICCs)



# Verallgemeinerungen des Rasch-Modells

## Das Partial-Credit-Modell

$\beta_{j,c}$  - Parameter für c-te Antwortkategorie der j-ten Aufgabe

$\tau_{j,l}$  - Schwellenwerte

**bisher:**  $u_{i,j} \in \{0,1\}$  - Variable Aufgabe gelöst bzw. Aussage zugestimmt  
(1 = ja, 0 = nein)

**jetzt:**  $u_{i,j} \in \{0, \dots, m_j\}$  - Variable Aufgabe gelöst bzw. Aussage zugestimmt  
(0 = nein, 1 = 1. Teilschritt, 2 = 1. und 2. Teilschritte, ...)

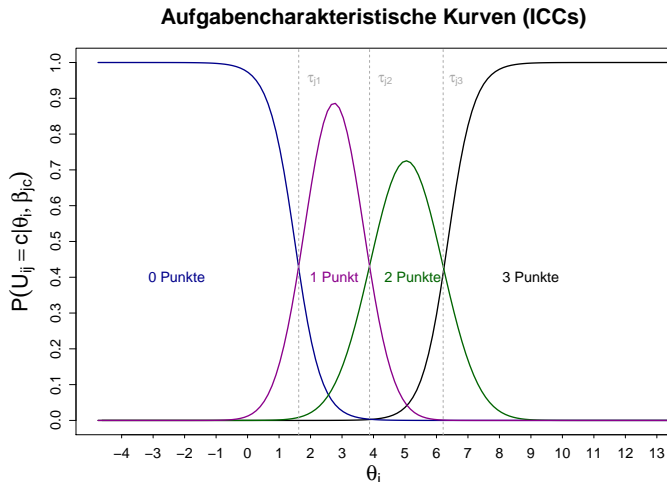
$$P(U_{i,j} = c | \theta_i, \beta_j) = \frac{e^{c \cdot \theta_i - \beta_{j,c}}}{\sum_{l=0}^{m_j} e^{l \cdot \theta_i - \beta_{j,l}}}$$

mit  $\beta_{j,c} = \sum_{l=1}^c \tau_{j,l}$  und  $\beta_{j,0} = 0$

# Verallgemeinerungen des Rasch-Modells

## Das Partial-Credit-Modell

### Beispiel (4 Kategorien: 0, 1, 2 oder 3 Punkte)



# Verallgemeinerungen des Rasch-Modells

weitere Verallgemeinerungen

- Das Rating-Scale-Modell
- Das dichotome Rasch-Modell mit Rateparametern
- Das Mischverteilungs-Rasch-Modell (Mixed-Rasch-Modell)
- Die Mehrdimensionale Rasch-Modelle
- u.a.



- Der Graphische Modelltest
- Likelihood-Quotienten-Test
- Wald-Tests

## Idee:

- **keine systematische Unterschiede** in der geschätzten Aufgaben-Parameter zw. den Gruppen  $\Rightarrow$  **Rasch-Modell gilt**
- **DIF** (*Differential Item Functioning*)  $\Rightarrow$  **Rasch-Modell gilt nicht**

# Modellgeltungstests

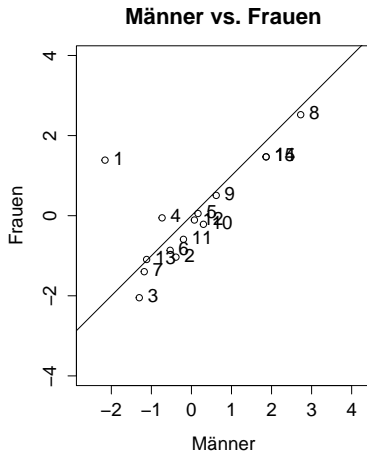
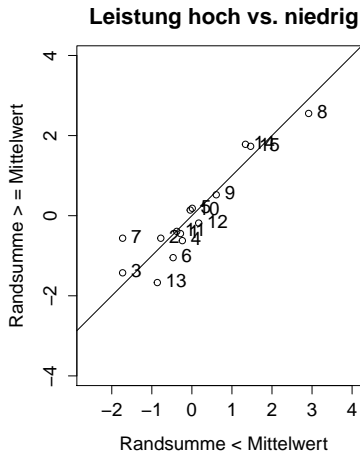
## Der Graphische Modelltest

**Idee:** Vergleiche geschätzte Aufgaben-Parameter in 2 Gruppen.  
Rasch-Modell gilt  $\Rightarrow$  Werte in beiden Gruppen stimmen überein  
(bis auf lineare Transformationen)

# Modellgeltungstests

Der Graphische Modelltest

Beispiel (Simulierte Daten: 200 Personen, 15 Aufgaben)

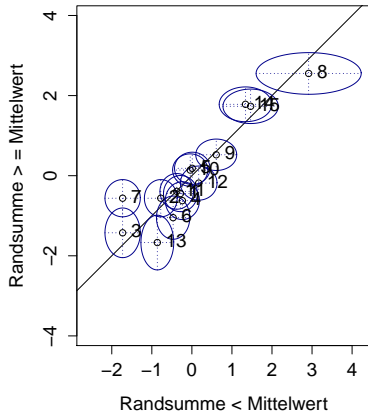


# Modellgeltungstests

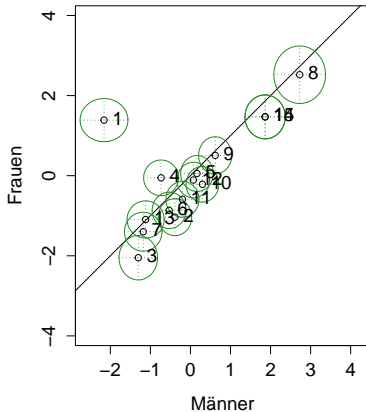
Der Graphische Modelltest

Beispiel (Simulierte Daten: 200 Personen, 15 Aufgaben)

Leistung hoch vs. niedrig



Männer vs. Frauen



# Modellgeltungstests

## Likelihood-Quotienten-Test von Andersen

- $k = 1 \dots K$  - Laufindex für den Gruppen
- $\beta_k$  - Aufgaben-Parameter aus einzelne Gruppe
- $\beta$  - Aufgaben-Parameter aus Gesamtstichprobe

$$H_0 : LQ = 1 \text{ vs. } H_1 : LQ \neq 1$$

mit:

$$LQ = \frac{L_u(r, \hat{\beta})}{\prod_{k=1}^K L_{u_k}(r_k, \hat{\beta}_k)}$$

Teststatistik:

$$T = -2 \cdot \ln(LQ) \sim \chi^2(K - 1) \cdot (m - 1)$$

$H_0$  abzulehnen, falls:  $T > z_{1-\alpha}(\chi^2)$

# Modellgeltungstests

## Likelihood-Quotienten-Test von Andersen

### Leistung

Andersen LR-test:	
LR-value:	24.807
Chi-square df:	14
p-value:	<b>0.037</b>

### Geschlecht

Andersen LR-test:	
LR-value:	111.721
Chi-square df:	14
p-value:	<b>0</b>

### Schultyp

Andersen LR-test:	
LR-value:	49.155
Chi-square df:	42
p-value:	<b>0.208</b>

- **Leistung:**
  - hoch
  - niedrig
- **Geschlecht:**
  - Männer
  - Frauen
- **Schultyp:**
  - Gymnasium
  - Realschule
  - Hauptschule
  - Integrierte Gesamtschule

# Modellgeltungstests

## Wald-Test

$$H_0 : \hat{\beta}_{j,k} = \hat{\beta}_{j,l} \text{ vs. } H_1 : \hat{\beta}_{j,k} \neq \hat{\beta}_{j,l} \text{ für } k \neq l$$

$$W_j = \frac{(\hat{\beta}_{j,1} - \hat{\beta}_{j,2})^2}{\hat{\sigma}_{j,1}^2 + \hat{\sigma}_{j,2}^2}$$

Teststatistiken:

$$T = \text{sign}(\hat{\beta}_{j,1} - \hat{\beta}_{j,2}) \cdot \sqrt{W_j} \sim N(0, 1)$$

$$T = (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2)' (\hat{\Sigma}_1 - \hat{\Sigma}_2)^{-1} (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) \sim \chi^2(m-1)$$

$H_0$  abzulehnen, falls:  $T > z_{1-\alpha}(N \text{ bzw. } \chi^2)$

# Modellgeltungstests

## Wald-Test

### Leistung hoch vs. niedrig

Wald test on item level (z-values):		
	z-statistic	p-value
beta Aufg. 1	-0.512	0.609
beta Aufg. 2	0.677	0.499
beta Aufg. 3	0.780	0.435
beta Aufg. 4	-1.186	0.236
beta Aufg. 5	0.573	0.567
beta Aufg. 6	-1.667	0.095
<b>beta Aufg. 7</b>	<b>3.570</b>	<b>0.000</b>
beta Aufg. 8	-0.504	0.614
beta Aufg. 9	-0.262	0.794
beta Aufg. 10	0.599	0.549
beta Aufg. 11	-0.044	0.965
beta Aufg. 12	-1.114	0.265
<b>beta Aufg. 13</b>	<b>-1.986</b>	<b>0.047</b>
beta Aufg. 14	1.107	0.268
beta Aufg. 15	0.640	0.522

### Männer vs. Frauen

Wald test on item level (z-values):		
	z-statistic	p-value
<b>beta Aufg. 1</b>	8.643	<b>0.000</b>
<b>beta Aufg. 2</b>	-2.039	<b>0.041</b>
<b>beta Aufg. 3</b>	-1.991	<b>0.046</b>
<b>beta Aufg. 4</b>	2.139	<b>0.032</b>
beta Aufg. 5	-0.354	0.723
beta Aufg. 6	-1.049	0.294
beta Aufg. 7	-0.638	0.523
beta Aufg. 8	-0.420	0.675
beta Aufg. 9	-0.351	0.725
beta Aufg. 10	-1.672	0.095
beta Aufg. 11	-1.260	0.208
beta Aufg. 12	-0.590	0.555
beta Aufg. 13	0.076	0.939
beta Aufg. 14	-1.041	0.298
beta Aufg. 15	-1.041	0.298



- Rasch-Modell und Verallgemeinerungen spielen grundlegende Rolle in der **IRT**
- Testentwicklung  $\Rightarrow$  Rasch-Modell
- Analysen von durchgeführten Tests  $\Rightarrow$  Verallgemeinerungen

## Weitere Fragestellungen:

- Weitere Verallgemeinerungen detailliert
- $\chi^2$ - Anpassungstest
- Analyse anhand Simulationen von verallgemeinerten Modellen

**Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!**



Strobl, C. (2010).

*Das Rasch-Modell: Eine verständliche Einführung für Studium und Praxis.*

Band 2, Rainer Hamp Verlag, München und Mering



Kubinger, K.D., Rasch, D., Yanagida, T. (2011).

*Statistik in der Psychologie. Von Einführungskurs bis zur Dissertation. Lehrbuch.*

Hogrefe Verlag, S. 555-568.









Moosbrugger, H., Kelava, A. (2012).

*Testtheorie und Fragebogenkonstruktion. Mit 66 Abbildungen und 41 Tabellen.*

2., aktualisierte und überarbeitete Auflage, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, S. 227-274.

# Quellenverzeichnis

-  Henning, H.J. (1974).  
*Skalenanalyse und Rasch-Modell.*  
Bonn
-  Penzel, M., Sälzer, C., Klieme, E., Köller, O.(Hrsg) (2013).  
*PISA 2012. Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland.*  
Waxmann Verlag, S. 334-337.
-  Toutenburg, H.,  
mit Beiträgen von Heumann, C., Nittner, T., Scheid, S. (2003).  
*Lineare Modelle. Theorie und Anwendungen.*  
2., neu bearbeitete und erweiterte Auflage, Physica Verlag, S. 402-403.
-  <http://www.jstatsoft.org/>
-  <http://www.sozialwissenschaftliche-forschungsmethoden.de/>
-  <http://www.r-project.org/>

### Suffiziente Statistiken

- suffiziente Statistik  $\neq$  erwartungstreue Statistik

#### Beispiel (für $n=5$ ):

- $\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$ 
  - *erwartungstreu* ✓
  - *suffizient* ✓
- $x^* = \frac{1}{3}(x_1 + x_3 + x_5)$ 
  - *erwartungstreu* ✓
  - **nicht suffizient**

# Anhang I

## Grundform des Rasch-Modells: Modellannahmen und Modelleigenschaften

### Suffiziente Statistiken

Beispiel (für  $n = 7$ ,  $m = 7$ )

Person	Aufgabe							$r_i$
	1	2	3	4	5	6	7	
1	0	1	0	1	0	0	0	2
2	0	1	1	1	0	1	0	4
3	1	1	0	0	0	1	1	4
4	0	0	0	0	1	1	0	2
5	0	0	0	0	0	1	0	1
6	1	1	1	1	1	1	0	6
7	1	0	0	0	1	0	0	2
$s_j$	3	4	2	3	3	5	1	

### Lokale Stochastische Unabhängigkeit

Lösungswahrscheinlichkeit für **alle** Aufgaben einer Person:

$$P(U_{i,1} = u_{i,1}, \dots, U_{i,m} = u_{i,m} | \theta_i, \beta_1, \dots, \beta_m) =$$

$$\prod_{j=1}^m P(U_{i,j} = u_{i,j} | \theta_i, \beta_j) =$$

$$\prod_{j=1}^m \frac{e^{u_{i,j}(\theta_i - \beta_j)}}{1 + e^{\theta_i - \beta_j}} =$$

$$\frac{e^{r_i \theta_i - \sum_{j=1}^m u_{i,j} \beta_j}}{\prod_{j=1}^m (1 + e^{\theta_i - \beta_j})}$$

### Lokale Stochastische Unabhängigkeit

Lösungswahrscheinlichkeit für **alle** Aufgaben und **alle** Personen:

$$P(U_1 = u_1, \dots, U_n = u_n | \theta_1, \dots, \theta_n, \beta) =$$

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m P(U_{i,j} = u_{i,j} | \theta_i, \beta_j) =$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{e^{r_i \theta_i - \sum_{j=1}^m u_{i,j} \beta_j}}{\prod_{j=1}^m (1 + e^{\theta_i - \beta_j})} =$$

$$\frac{e^{\sum_{i=1}^n r_i \theta_i - \sum_{j=1}^m s_j \beta_j}}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (1 + e^{\theta_i - \beta_j})}$$

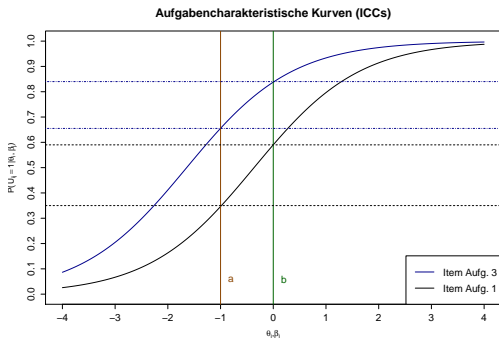


# Anhang I

## Grundform des Rasch-Modells: Modellannahmen und Modelleigenschaften

### Spezifische Objektivität

- Aussagen über die Fähigkeiten von 2 Personen unabhängig von der gewählten Aufgabe
- Aussagen über die Schwierigkeit von 2 Aufgaben unabhängig von den gewählten Personen



# Anhang II

## Parameterschätzung: Bedingte ML-Schätzung

**Schritt 1:** Schätzung der Aufgabenparameter  $\beta_j$

**Schritt 2:** Schätzung der Personenparameter  $\theta_i$

Die Likelihood (für eine Person und **alle** Aufgaben):

$$L_{u_i}(\theta_i, \beta) = P(u_i | \theta_i, \beta) = \frac{e^{r_i \theta_i - \sum_{j=1}^m u_{i,j} \beta_j}}{\prod_{j=1}^m (1 + e^{\theta_i - \beta_j})}$$

# Anhang II

## Parameterschätzung: Bedingte ML-Schätzung

$$L_{u_i}(\theta_i, \beta) = g(r_i|\theta_i, \beta) \cdot h(u_i|r_i, \theta_i, \beta)$$

$\Leftrightarrow$

$$h(u_i|r_i, \theta_i, \beta) = \frac{L_{u_i}(\theta_i, \beta)}{g(r_i|\theta_i, \beta)}$$

mit

$h(u_i|r_i, \theta_i, \beta)$  - bedingte auf  $r_i$  Likelihood für i-te Person

$g(r_i|\theta_i, \beta)$  - Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte  $r_i$  zu beobachten

# Anhang II

## Parameterschätzung: Bedingte ML-Schätzung

$$\begin{aligned}g(r_i|\theta_i, \beta) &= \sum_{\sum_j u_{i,j}=r_i} P(u_i|\theta_i, \beta) = \\& \sum_{\sum_j u_{i,j}=r_i} \frac{e^{r_i\theta_i - \sum_{j=1}^m u_{i,j}\beta_j}}{\prod_{j=1}^m (1 + e^{\theta_i - \beta_j})} = \\& \frac{e^{r_i\theta_i}}{\prod_{j=1}^m (1 + e^{\theta_i - \beta_j})} \cdot \sum_{\sum_j u_{i,j}=r_i} e^{-\sum_{j=1}^m u_{i,j}\beta_j} = \\& \frac{e^{r_i\theta_i}}{\prod_{j=1}^m (1 + e^{\theta_i - \beta_j})} \cdot \gamma_{r_i}(\beta)\end{aligned}$$

# Anhang II

## Parameterschätzung: Bedingte ML-Schätzung

Bedingte Likelihood für i-te Person:

$$\begin{aligned}h(u_i|r_i, \theta_i, \beta) &= \frac{L_{u_i}(\theta_i, \beta)}{g(r_i|\theta_i, \beta)} = \\&= \frac{e^{r_i\theta_i - \sum_{j=1}^m u_{i,j}\beta_j}}{\prod_{j=1}^m (1 + e^{\theta_i - \beta_j})} : \frac{e^{r_i\theta_i} \gamma_{r_i}(\beta)}{\prod_{j=1}^m (1 + e^{\theta_i - \beta_j})} = \\&= \frac{e^{r_i\theta_i - \sum_{j=1}^m u_{i,j}\beta_j}}{\prod_{j=1}^m (1 + e^{\theta_i - \beta_j})} \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (1 + e^{\theta_i - \beta_j})}{e^{r_i\theta_i} \gamma_{r_i}(\beta)} = \\&= \frac{e^{-\sum_{j=1}^m u_{i,j}\beta_j}}{\gamma_{r_i}(\beta)} = h(u_i|r_i, \beta)\end{aligned}$$

# Anhang II

## Parameterschätzung: Bedingte ML-Schätzung

Bedingte Likelihood für gesamte Daten:

$$h(u|r, \beta) = \prod_{i=1}^n h(u_i|r_i, \beta) =$$

$$\prod_{i=1}^n \frac{e^{-\sum_{j=1}^m u_{i,j}\beta_j}}{\gamma_{r_i}(\beta)} =$$

$$\frac{e^{-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m u_{i,j}\beta_j}}{\prod_{i=1}^n \gamma_{r_i}(\beta)} =$$

$$\frac{e^{-\sum_{j=1}^m s_j\beta_j}}{\prod_{i=1}^n \gamma_{r_i}(\beta)}$$

# Anhang II

## Parameterschätzung: Marginale ML-Schätzung

**Schritt 1:** Schätzung der Aufgabenparameter  $\beta_j$

**Schritt 2:** Schätzung der Personenparameter  $\theta_i$

**Unterschied zu bedingten ML-Schätzung:** Personenparameter werden rausintegriert.

**Nötig:** Annahme über marginale Verteilung (Randdichte  $f(\theta) \sim N(0,1)$ )

**Problem:** NV-Annahme für Randdichte  $f(\theta)$  falsch  $\rightarrow$  Schätzung verzerrt

# Anhang II

## Parameterschätzung: Marginale ML-Schätzung

$$L_u(\theta, \beta) \cdot f(\theta) = P(u|\theta, \beta) \cdot f(\theta) = P(u, \theta|\beta)$$

Marginale Likelihood für die Aufgabenparameter:

$$L_u(\beta) = \int P(u, \theta|\beta) d\theta$$