Explorative Faktorenanalyse

Bachelorseminar:

Ausgewählte Aspekte der Wirtschafts- und Sozialstatistik

Vorbereitungsmaterial

Autor: Simon Reitzner
Betreuerin: Eva Endres, M.Sc.

11. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der Statistik wird unterschieden zwischen manifesten Variablen, die direkt beobachtbar und messbar sind, und latenten Variablen, die nicht unmittelbar messbar sind. Das Erfassen dieser latenten Variablen stellt, aufgrund der fehlenden Messbarkeit, immer wieder ein Problem dar. Um dennoch mit latenten Variablen arbeiten zu können, werden aus messbaren Indikatoren, latente Konstrukte gebildet (Bühner; 2011, S.296).
Mithilfe der explorativen Faktorenanalyse, einem multivariaten Verfahren, kann von Indikatorvariablen auf latente Hintergrundvariablen geschlossen werden (Brosius; 2011, S.787). Ein weiteres Ziel der Faktorenanalyse ist, neben dem Entdecken von latenten Strukturen, die Dimensionsreduktion. Besteht ein hoher linearer Zusammenhang zwischen den Variablen, lassen sie diese mit einem möglichst geringem Informationsverlust zu homogenen latenten Gruppen zusammenfassen (Bühner; 2011, S.296). Dadurch kann die Komplexität der Daten verringert werden, weil der Datensatz auf eine kleinere Anzahl an Variablen reduziert wird (Brosius; 2011, S.787).

Im Folgenden werden die Gruppen bzw. die latenten Variablen „Faktoren" genannt. Neben der explorativen, der strukturentdeckenden, gibt es die konfirmatorische Faktorenanalyse, welche bereits bestehende Konstrukte überprüft.

Die vorliegende Arbeit soll sich auf die explorative Faktorenanalyse beschränken und die gängigsten Methoden erklären bzw. veranschaulichen. Dabei werden Methoden zur Überprüfung, ob sich das Datenmaterial für eine Faktorenanalyse eignet, außer Acht gelassen und es wird angenommen, dass die Korrelation zwischen den Variablen geeignet hoch ist.

2 Theorie

2.1 Grundidee der Faktorenanalyse

Das Modell der Faktorenanalyse nimmt an, dass der Wert einer Beobachtung i für eine Variable j, z.B. eine Antwort einer Person auf eine Frage in einem Test, sich durch eine Linearkombination aus gewichteten, latenten Faktoren und einem zufälligen Fehler darstellen lässt (Bühner; 2011, S.299):

$$z_{ij} = l_{j1}f_{i1} + ... + l_{jl}f_{il} + ... + l_{jk}f_{ik} + e_{ij}$$

z_{ij}	standardisierter Wert einer Beobachtung/Person i auf eine Variable j
l_{jl}	Ladung der Variable j auf Faktor l
f_{il}	Faktorwert von Beobachtung/Person i auf Faktor l
e_{ij}	Fehlerkomponente/spezifische Faktoren

Die Grundlage der Faktorenanalyse ist ein lineares Modell mit den unbekannten Größen l_{jl}, f_{il} und e_{ij}. Ebenfalls unbekannt ist die Faktorenanzahl k. Mittels der Faktorenextraktion werden diese Größen geschätzt. Anschließend zwecks Interpretierbarkeit die Variablen den Faktoren zugeordnet. Folgende Grafik (in Anlehnung an Bühl (2008, S.527)) veranschaulicht die Zuordnung der Variablen zu den Faktoren:

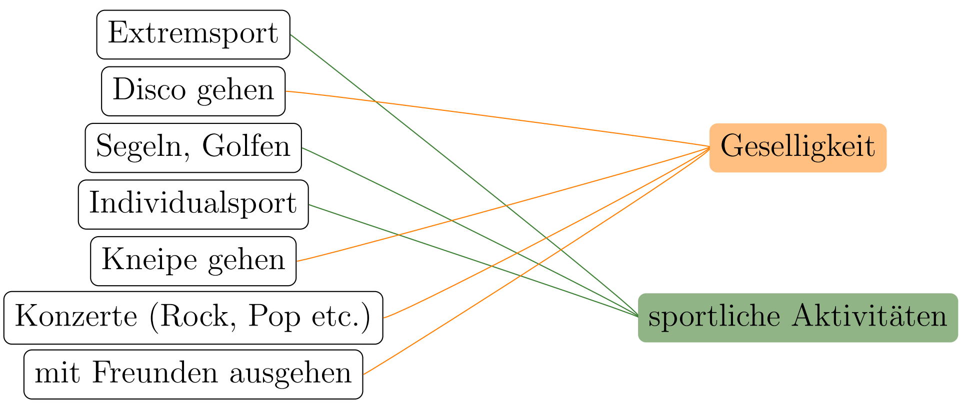

Abbildung 1: Zuordnung verschiedener Freizeitaktivitäten zu Faktoren

2.2 Das Modell

Das Modell der Faktorenanalyse basiert auf einem linearen Modell:

$$\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{L}\mathbf{f} + \mathbf{e}$$

$\mathbf{y}$ stellt einen p-dimensionalen Zufallsvektor dar. $\boldsymbol{\mu}$ ist der Vektor der Erwartungswerte von $\mathbf{y}$. $\mathbf{f}$ entspricht dem Vektor der gemeinsamen Faktoren. Da eine Reduktion der Dimension des Datensatz stattfindet, ist die Anzahl k an Faktoren kleiner als die Anzahl p an Variablen.
$\mathbf{e}$ stellt den Vektor der Restterme dar. Die Restterme sind für jede Variable unterschiedlich und werden deshalb auch spezifische Faktoren genannt. Diese entsprechen dem Anteil, der durch die Faktoren nicht erklärt werden kann. $\mathbf{L}$ ist eine $(p \times k)$-Ladungsmatrix (Fahrmeir et al.; 1996, S.641ff.).

Über die spezifischen Faktoren werden folgende Annahmen über den Erwartungswert und die Varianz getroffen:

$$\mathbb{E}(\mathbf{e}) = \mathbf{0}\ , \quad \mathbb{V}(\mathbf{e}) = \mathbf{V}$$

wobei davon ausgegangen wird, dass $\mathbf{e}$ nicht untereinander korreliert.
Folgendes gilt für den Vektor $\mathbf{f}$:

$$\mathbb{E}(\mathbf{f}) = \mathbf{0}\ , \quad \mathbb{V}(\mathbf{f}) = \boldsymbol{\Phi}$$

Ist $\mathbb{V}(\mathbf{f}) = \mathbf{I}$, liegt ein orthogonales Modell vor. Die Faktoren sind voneinander unabhängig. Geht man von einer Abhängigkeit aus, liegen oblique Faktoren vor (Fahrmeir et al.; 1996, S.642).

2.3 Fundamentaltheorem der Faktorenanalyse

Grundlage der Faktorenanalyse ist die Zerlegung der Varianz von $\mathbf{y}$. Diese lässt sich folgendermaßen formulieren (nach Fahrmeir et al.; 1996, S.643):

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma} &= Cov(\mathbf{y}) \\
&= \mathbb{E}((\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T) \\
&= \mathbb{E}((\mathbf{Lf} + \mathbf{e})(\mathbf{Lf} + \mathbf{e})^T) \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{Lff}^T\mathbf{L}^T) + \mathbb{E}(\mathbf{Lfe}^T) + \mathbb{E}(\mathbf{ef}^T\mathbf{L}^T) + \mathbb{E}(\mathbf{ee}^T) \\
&= \mathbf{L}\ Cov(\mathbf{f})\ \mathbf{L}^T + \mathbf{V}
\end{aligned}$$

Im Fall eines orthogonalen Modells mit $Cov(\mathbf{f}) = \mathbf{I}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma} &= \mathbf{L}\ Cov(\mathbf{f})\ \mathbf{L}^T + \mathbf{V} \\
&= \mathbf{LL}^T + \mathbf{V}
\end{aligned}$$

Für die Kovarianz zwischen $\mathbf{y}$ und $\mathbf{f}$ gilt folgendes:

$$\begin{aligned}
Cov(\mathbf{y}, \mathbf{f}) &= Cov(\mathbf{Lf} + \mathbf{e}, \mathbf{f}) \\
&= Cov(\mathbf{Lf}, \mathbf{f}) + Cov(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \\
&= \mathbf{L}\ Cov(\mathbf{f})
\end{aligned}$$

Im Fall eines orthogonalen Modells mit $Cov(\mathbf{f}) = \mathbf{I}$:

$$\begin{aligned}
Cov(\mathbf{y}, \mathbf{f}) &= Cov(\mathbf{Lf} + \mathbf{e}, \mathbf{f}) \\
&= Cov(\mathbf{Lf}, \mathbf{f}) + Cov(\mathbf{e}, \mathbf{f}) \\
&= \mathbf{L}
\end{aligned}$$

Im orthogonalen Modell entspricht die Ladung einer Variable auf einen Faktor der normierten Kovarianz zwischen dieser Variable und diesem Faktor. Dieser Zusammenhang ist wichtig für spätere Rotationsmethoden (siehe Kapitel 2.9) und Interpretationen. Die Summe der quadrierten Ladungen für einen Faktor entspricht seinem Eigenwert und dem Anteil an Varianz der Daten, die dieser

Faktor erklärt. Ein weiterer wichtiger Begriff ist die „Kommunalität“. Eine Kommunaltität ist der Varianzanteil einer Variablen, der durch das gesamte Faktorenmodell erklärt wird.

2.4 Schritte der Faktorenanalyse

Die Faktorenanalyse kann man in diese Schritte unterteilen:

1. Überprüfung der Bedingungen für eine Faktorenanalse (Eignungstests etc.):

   Notwendig für eine Durchführung der Faktorenanalse ist ein ausreichend hoher Zusammenhang bzw. Korrelation zwischen den Variablen.

2. Berechnung der Korrelationsmatrix der Daten und Standardisierung

3. Faktorenextraktion (Hauptkomponentenanalyse, Hauptachsenanalyse, Maximum-Likelihood-Methode, ...)

4. Faktorenrotation (Varimax, Promax, ...)

5. Interpretation der Faktoren

6. Berechnung der Faktorenwerte

2.5 Berechnung der Korrelationsmatrix und Standardisierung

Da die Varianz der Daten meistens unbekannt ist, wird diese durch die empirische Kovarianzmatrix bzw. der Korrelationsmatrix geschätzt. Für die Schätzung der Faktorenanalyse nach der Hauptkomponentenanalyse ist eine Standardisierung der Daten notwendig, da diese nicht invariant gegenüber Skalierungen ist (Fahrmeir et al.; 1996, S.662). Nach einer z-Standardisierung entspricht die Varianz-Kovarianzmatrix der Daten der Korrelationsmatrix. Dies erleichtert die Berechnung und die Interpretation der Ergebnisse.

2.6 Schätzmethoden des Faktorenmodells

Folgende Methode gehören zu den wichtigsten Verfahren, um das Faktorenmodell zu schätzen:

- Maximum-Likelihood-Methode
- Hauptkomponentenmethode
- Hauptfaktorenanalyse bzw. Hauptachsen-Faktorenanalyse

Mit diesen wird die unbekannte Ladungsmatrix $\mathbf{L}$ bestimmt. Die drei genannten Methoden werden in den folgenden Unterkapitel kurz beschrieben.

2.6.1 Faktorenanalyse mit der Maximum-Likelihood-Methode

Grundlage für dieses Schätzverfahren ist das Maximum-Likelihood-Prinzip. Die unbekannte und zu schätzende Ladungsmatrix $\mathbf{L}$ und die Varianz der spezifischen Faktoren $\mathbf{V}$ werden mit der ML-Methode geschätzt. Zwingend notwendig ist dabei die Vorraussetzung, dass die Daten multivariat-normalverteilt sind. Nach erster Schätzung wird das berechnete Modell mit einem Likelihood-Quotienten-Test auf Signifikanz geprüft. Bei fehlender Signifikanz lässt sich die Anzahl der Faktoren k ändern und das Modell wieder einem Test unterziehen.

2.6.2 Hauptkomponentenmethode

Das vollständige Modell der Hauptkomponentenmethode sieht folgendermaßen aus:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}\mathbf{L}^T$$

und der Zerlegung der Korrelationsmatrix:

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

Bei diesem Modell geht man davon aus, dass die Faktoren die gesamte Varianz erklären können. Es gibt keine spezifischen Faktoren.

2.6.3 Hauptfaktorenanalyse

Anders als bei der Hauptkomponentenmethode geht die Hauptfaktorenanalyse (oder auch Hauptachsenanalyse) davon aus, dass es spezifische Faktoren gibt. Diese Methode entspricht dementsprechend der ursprünglichen Idee der Faktorenanalyse:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}\mathbf{L}^T + \mathbf{E}$$

und:

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T + \mathbf{V} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{R} - \mathbf{V} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{R_h} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

$\mathbf{R_h}$ wird reduzierte Korrelationsmatrix genannt. Sie unterscheidet sich von der Korrelationsmatrix insofern, dass auf ihrer Diagonale die Kommunalitäten $h_i^2 = 1 - v_i^2$ stehen. Diese Kommunaltitäten werden im Rahmen der Hauptfaktorenanalyse iterativ geschätzt. Bei der Hauptkomponentenmethode stellt sich diese Kommunalitäten-Problem nicht, da es keine Einzelrestvarianzen gibt und folglich alle Kommunalitäten gleich 1 sind. Als mögliche Startkommunalität bietet sich der quadrierte multiple Korrelationskoeffizient zwischen der Variable z_j und den übrigen Variablen oder der betragsmäßig größte Korrelationskoeffizient zweier Variablen an (Everitt und Hothorn; 2011, S.141).

2.7 Bestimmen der Faktorenanzahl

Nach der Zerlegung der Korrelationsmatrix, erhält man eine $(p \times p)$-Ladungsmatrix. Es liegen genauso viele Faktoren wie Variablen vor. Ziel der Faktorenanalyse ist es, die Anzahl an Variablen auf wenige Faktoren zu reduzieren, die möglichst viel der Varianz der Daten erklären. Es soll $k < p$ gelten. Geometrisch betrachtet bedeutet das, dass zu Beginn ein p-dimensionalen Vektorraum vorliegt, der auf einen k-dimensionalen Vektorraum reduziert werden soll. Da die Anzahl k an Faktoren unbekannt ist, muss diese durch Extraktionsmethoden geschätzt werden. Es sind die Faktoren zu extrahieren, die besonders viel Varianz von $\mathbf{Z}$ erklären. Das Problem bei der Bestimmung der Faktorenanzahl ist, dass es kein klares Kritierium gibt, wann ein Faktor viel Varianz erklärt. Es kann vorteilhaft sein, wenn bereits Vorwissen über die Dimension des Faktorraumes vorhanden ist. Andernfalls lassen sich mit folgenden Methoden die Faktorenanzahl bestimmen:

- Kaiser-Guttman-Kriterium

  Es wird davon ausgegangen, dass ein Faktor, der mehr als die Varianz einer standardisierten Variable erklärt, auffällig ist und extrahiert werden sollte. Zunächst werden die Eigenwerte von $\mathbf{R}$ berechnet. Ist ein Eigenwert größer 1, wird dieser extrahiert. Die Anzahl der Faktoren entspricht der Anzahl an Eigenwerten größer 1 (Bortz und Schuster; 2010, S.415).

- Scree-Test

  Bei diesem Verfahren nach Cattell trägt man die Eigenwerte in einem Plot abfallend nach ihrer Größe an (siehe Abbildung 2). Der Verlauf dieser fallenden Kurve enthält oft einen Knick oder großen Sprung zwischen zwei Eigenwerten. Die Anzahl an bedeutenden Faktoren entspricht der Anzahl an Eigenwerten vor diesem Sprung (Fahrmeir et al.; 1996, S.669).

- Parallelanalyse

  Die Parallelanalyse nach Horn (1965) ähnelt der Analyse mit dem Scree-Test.

Die empirischen Eigenwerte werden mit den Eigenwerten von simulierten, normalverteilten Zufallsvariablen verglichen. Dazu werden die Eigenwerte von mehreren Boostrap-Stichproben in den Scree-Plot gezeichnet (siehe Abbildung 2). Alle empirischen Eigenwerte, die größer als die simulierten Eigenwerte sind, gelten als auffällig und werden extrahiert.

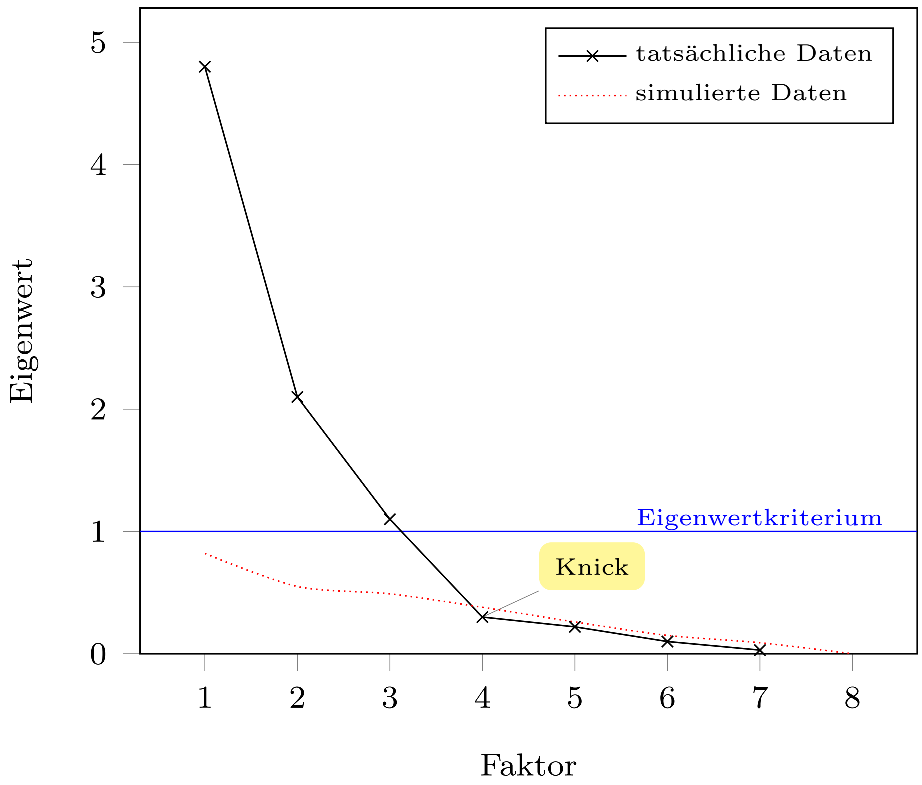

Abbildung 2: Scree-Plot mit verschiedenen Selektionskriterien

- Minimum-Average-Partial-Test (MAP-Test)
  Für diesen Test nach Velicer wird zunächst eine Hauptkomponentenanalyse durchgeführt und der Faktor mit dem höchsten Eigenwert entfernt. Die Korrelation zwischen den Variablen wird erneut berechnet, allerdings ohne den Effekt des entfernten Faktors. Es liegt nun eine Matrix mit den partiellen Korrelationen der Variablen

für den ersten Faktor vor. Für diese Matrix wird das arithmetische Mittel

$$MAP_l = \sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{j'=1 \\ j \neq j'}}^{p} \frac{r_{jj'l}^{*2}}{p(p-1)}$$

berechnet. p steht für die Anzahl an möglichen Faktoren, die der Variablenanzahl entspricht. l ist der Index für den Faktor, dessen mittlere quadrierte Partialkorrelation berechnet wird. Die mittlere quadrierte Partialkorrelation ist das arithmetische Mittel an Restvarianz, welche die herauspartialisierten Faktoren nicht erklären. Ist diese sehr klein, erklärt das Modell viel der Korrelation der Daten. Dieses Verfahren wird mit allen Variablen durchgeführt, bis nur noch der Effekt eines Faktors in der Korrelationsmatrix enthalten ist. Für jeden theoretisch möglichen Faktor liegt die mittlere quadrierte Partialkorrelation vor. Diese werden untereinander verglichen. Angenommen dere k-te Faktor hat die kleinste mittlere quadrierte Partialkorrelation, so werden k Faktoren extrahiert (vgl. Garrido E. et al.; 2011, S.553ff.).

- Likelihood-Quotienten-Test
  Die Vorraussetzung für diese Methode ist die Normalverteilung der Daten. Dieses Verfahren wird häufig verwendet, wenn eine ML-Faktorenanalyse verwendet wird. Es wird die Hypothese

  $H_0(l)$: „l Faktoren können die Daten erklären“

  getestet. Wird H_0 abgelehnt, wird die Anzahl l an Faktoren erhöht, H_0 erneut getestet und gegebenenfalls wiederholt bis Signifikanz erreicht ist (vgl. Fahrmeir et al.; 1996, S.654ff.).

2.8 Reduktion der Ladungsmatrix

Nach einer Extraktionsmethode mit der Hauptkomponentenmethode oder der Hauptfaktorenanalyse liegt nach der Spektralzerlegung eine $(p \times p)$-Ladungsmatrix vor. Die Ladungsmatrix wird nun auf die wichtigsten k Faktoren reduziert, sodass eine $(p \times k)$-Ladungsmatrix entsteht. Die von den

Faktoren, die nicht in das Modell aufgenommen werden, erklärte Varianz wird zu **V** hinzugefügt (vgl. Fahrmeir et al.; 1996, S.672f.).

2.9 Rotation der Faktoren

Für eine eindeutige Zuordnung der Variablen zu den Faktoren (wie in Grafik 1) sind entsprechende Ladungen erforderlich, weil sie das Kriterium für die Zuordnung sind. Die Variablen, die auf einen Faktor hoch laden bzw. hoch mit diesem korrelieren, werden diesem Faktor zugeordnet. Für eine leichtere Interpretation und Zuordnung werden Ladungen angestrebt, sodass jeweils die Variable auf einen Faktor hochlädt und auf die anderen Faktoren niedrig. Oft ist eine eindeutige Zuordnung nicht möglich, weil Variablen auf mehrere Faktoren hoch laden, weshalb Rotationsmethoden notwendig sind.

2.9.1 Geometrische Betrachtung der Faktoren

Werden die Faktoren als Vektoren angesehen und die Ladungen als Punkte in einem k-dimensionlen Vektorraum, so lassen sich die Rotationen gut veranschaulichen. Die Ladungen auf die Faktoren stellen die Koordinaten für eine Variable dar.
Die folgenden Grafiken (angelehnt an Fahrmeir et al.; 1996, S.678f.) zeigen beispielhaft 2 Faktoren und ihre Ladungen:

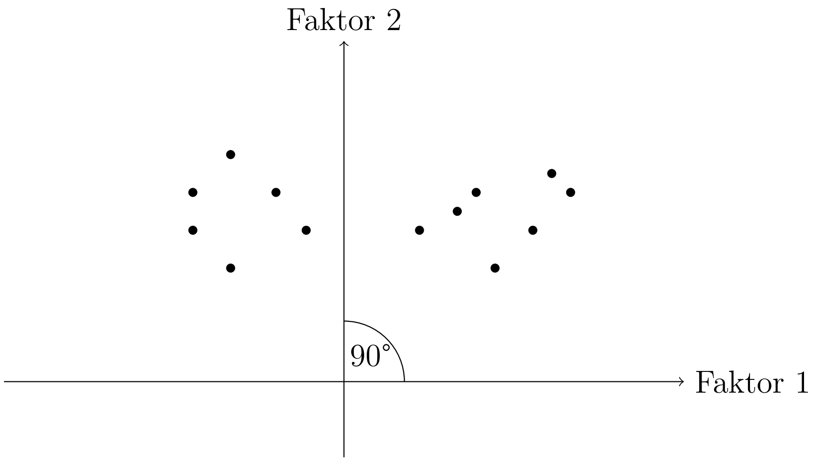

Abbildung 3: Faktoren mit Ladungen vor der Rotation

Vor der Rotation wird angenommen, dass die Faktoren unabhängig sind, d.h. sie stehen senkrecht aufeinander.
Ziel aller Rotationen, sowohl für unabhängige, als auch für abhängige Faktoren ist es, die Faktoren im Faktorraum rotieren zu lassen, sodass sie möglichst gut zu den Ladungen passen.

Sind Faktoren unabhängig voneinander, so sind sie auch nach der Rotation noch orthogonal:

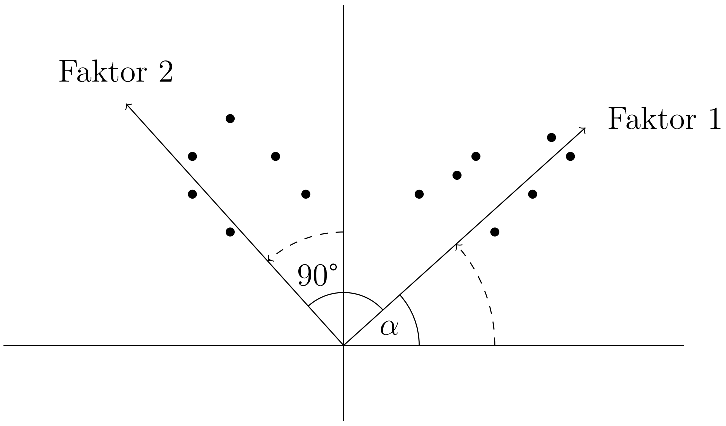

Abbildung 4: Faktoren nach orthogonaler Rotation

Bei abhängigen Faktoren weicht der Winkel zwischen den Faktoren von 90° ab:

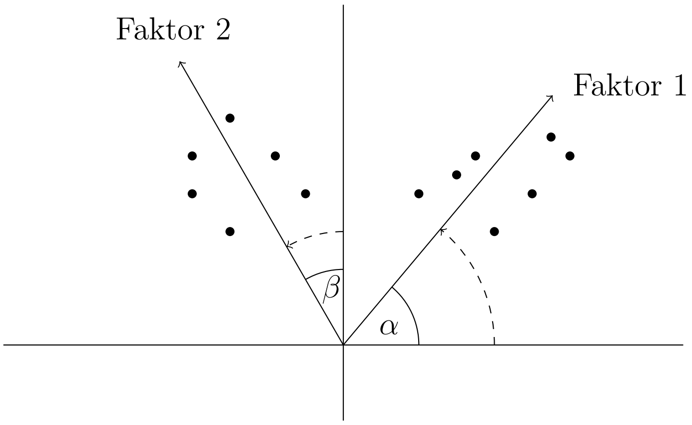

Abbildung 5: Faktoren nach orthogonaler Rotation

Nach der Extraktion der Faktoren, liegen orthogonale Faktoren vor, d.h. die Faktoren stehen senkrecht zueinander. Während bei einer orthogonalen Rotation der 90° Winkel zwischen den Faktoren erhalten bleibt, lässt eine oblique Rotation die Faktoren in beliebigen Winkeln drehen.
Wird angenommen, dass die Faktoren miteinander korrelieren, findet erst mit einer obliquen Rotation eine Beachtung dieser Abhängigkeit statt.

2.9.2 Faktorentransformation

Bei einer Transformation darf sich nicht der Erklärungsanteil an der Varianz der Variablen ändern. Warum eine Faktorentransformation möglich ist, zeigt folgende Berechnung (vgl. Fahrmeir et al.; 1996, S.678):

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{Lf} + \mathbf{e} = \mathbf{LMM^{-1}f} + \mathbf{e} \\ &= \mathbf{LM}\ \ \mathbf{M^{-1}f} + \mathbf{e} = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{f}} + \mathbf{e} \end{aligned}$$

$\mathbf{M}$ sei eine Rotationsmatrix aus $\mathbb{R}^{k,k}$ mit der Inversen $\mathbf{M^{-1}}$.
Es ist zu erkennen, dass die Ladungsmatrix und die Matrix der Faktorenwerte $\mathbf{F}$ (siehe Kapitel 2.11) nicht eindeutig sind. Sowohl $\mathbf{L}$ und $\mathbf{F}$, als auch $\tilde{\mathbf{L}}$ und

$\tilde{\mathbf{F}}$ stellen Lösungen der Zerlegung von $\mathbf{z}$ dar. Die verschiedenen Rotationsmethoden versuchen alle durch Maximierung der Ladungen aus der Menge der existierenden Ladungsmatrizen eine zu finden, sodass die Faktoren möglichst leicht interpretiert und Variablen möglichst eindeutig zugeordnet werden können.

2.9.3 Iterativer Rotationsprozess

Bei vielen Rotationsmethoden wird die Rotationsmatrix über einen iterativen Prozess bestimmt. Folgende Schritte werden durchgeführt:

1. Aufstellen der Initial-Rotationsmatrix und Ladungsmatrix:

$$\begin{aligned} &\text{Initial-Rotationsmatrix:} && \mathbf{M_1} = \mathbf{I_k} \\ &\text{Initial-Ladungsmatrix:} && \mathbf{L_0} = \mathbf{L} \\ \\ &\text{rotierte Ladung:} && \tilde{l}_{jl} = \mathbf{l_j}^T \mathbf{m_l} \end{aligned}$$

2. Maximieren der Varianzen durch Anwendung des Rotationskriterium auf $\tilde{\mathbf{L}}_\mathbf{1} = \mathbf{L_0 M_1} = (\tilde{l}_{jl})$:
   Bsp.: Varimaxkriterium (siehe Varimaxkriterium in 2.9.4)

$$Q_{Varimax} = \sum_{l=1}^{k} \underbrace{\sum_{j=1}^{p} (\tilde{l}_{jl}^2 - \frac{\sum_{l=1}^{p} \tilde{l}_{jl}^2}{p})^2}_{p \cdot s_l^2} \longrightarrow max$$

   mit der Bedingung, dass $\mathbf{M}$ orthogonal ist. (Lagrange Methode!)
   $\longrightarrow$ durch Ableiten nach $\mathbf{M}$ und Nullsetzen, liegt eine quadratische Matrix $\mathbf{B_1}$ vor.

3. Singulärwertzerlegung von $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B_1} = \mathbf{U}\ \mathbf{diag}(\lambda)\mathbf{V}^T = \underbrace{\mathbf{UV}^T}_{M_2}\ \underbrace{\mathbf{V}\ \mathbf{diag}(\lambda)\mathbf{V}^T}_{A_1} = \mathbf{M_2 A_1}$$

4. $\mathbf{M_2}$ ist die Rotationsmatrix für die 2.Iteration

Die Schritte werden wiederholt bis Konvergenz eintritt. Die ausführliche Darstellung dieser Iteration ist in Knüsel (2008) zu finden.

2.9.4 Orthogonale Rotationsmethoden

Bei einer orthogonalen Rotation ist die Unabhängigkeit der Faktoren nach der Rotation noch vorhanden. Das ist in Abbildung 4 zu erkennen, weil beide Faktoren um den gleichen Winkel α rotiert werden.

- Varimax
  Ziel dieser Methode nach Kaiser (1958) ist es, eine hohe und ansonsten niedrige Ladungen für eine Variable vorliegen zu haben. Dies wird bei dieser Methode durch die Maximierung der Varianz der Ladungsquadrate für jeden Faktor erreicht. Folgender Ausdruck wird maximiert:

$$Q_{Varimax} = \sum_{l=1}^{k} \underbrace{\sum_{j=1}^{p} (\tilde{l}_{jl}^2 - \frac{\sum_{j=1}^{p} \tilde{l}_{jl}^2}{p})^2}_{p \cdot s_l^2} \longrightarrow max$$

  s_l^2 ist die Varianz der quadrierten Ladungen für den Faktor l

- Quartimax
  Die Quartimax ist eine Rotation, ähnlich wie die Varimax-Methode. Allerdings werden die Varianzen der Variablen (Zeilen) maximiert, anstatt der Faktoren. Folgender Ausdruck hier soll maximiert werden (vgl. Fahrmeir et al.; 1996, S.680):

$$Q_{Quartimax} = \sum_{j=1}^{p} \underbrace{\sum_{l=1}^{k} (\tilde{l}_{jl}^2 - \frac{\sum_{l=1}^{k} \tilde{l}_{jl}^2}{k})^2}_{k \cdot s_j^2} \longrightarrow max$$

2.9.5 Oblique Rotationsmethoden

Wird Oblique rotiert, gibt man die Unabhängigkeit der Faktoren auf. In Abbildung 5 wird Faktor 1 um den Winkel α und Faktor 2 um den Winkel β gedreht.

- Promax
  Der Ausgangspunkt der Promax-Rotation ist das Ergebnis einer Varimax-Rotation. Zunächst wird eine Zielladungsmatrix $\mathbf{T}$ konstruiert, indem die Elemente der varimax-rotierten Ladungsmatrix potentiert werden. Vorzeichen der Ladungen bleiben dabei erhalten:

  $$\mathbf{T} \;=\; \tilde{\mathbf{L}} \cdot (|\tilde{l}_{jl}^{m-1}|)$$

  Dieser Zielmatrix wird die Ladungsmatrix aus der Varimax-Rotation durch Regression angenähert Revelle (2015, siehe Funktion: Promax).

- Oblimax
  Diese Rotation entspricht der orthogonalen Quartimax-Methode. Allerdings wird die Bedingung der orthogonalen Faktoren fallen gelassen.

2.10 Interpretation der Faktoren

Nach der Zuordnung der Variablen zu den Faktoren, werden die Faktoren für gewöhnlich interpretiert. Anhand der Variablen wird versucht eine Bezeichnung zu finden. In Abbildung 1 liegen Variablen vor, die bereits zugeordnet sind. Die Bezeichnungen „Geselligkeit“ und „Sportliche Aktivitäten“ sind das Ergebnis der Interpretation.

2.11 Faktorenwerte

Zu Beginn der Faktorenanalyse war die Datenmatrix mit den Ausprägungen der Objekte/Personen auf den Variablen vorhanden. Der letzte Schritt der Faktorenanalyse ist es, falls verlangt, die Ausprägungen der Objekte/Personen auf die Faktoren zu bestimmen. Mit den Faktorenwerten ist es möglich, weitere Analysen, wie eine Faktorenanalyse zweiter Ordnung, durchzuführen (Noack; 2007, S.55). Wurde eine Hauptkomponentenmethode durchgeführt, können die Faktorenwerte direkt berechnet werden, weil keine spezifischen Faktoren geschätzt werden müssen. Nach einer ML-Faktorenanalyse oder der Hauptfaktorenanalyse sind je nach Ausgangslage des Datensatzes und Eigenschaften der Faktoren folgende Schätzverfahren möglich: (gewichtete) Summenscores, Multiple Regression, Bartlett-Methode, Anderson-Rubin-Verfahren (DiStefano et al.; 2009) oder die Schätzung nach Ten Berge (Grice; 2001, S.433).

Literatur

Bortz, J. und Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler. Lehrbuch mit Online-Materialien*, Springer.

Brosius, F. (2011). *SPSS 19*, mitp-Verlag.

Bühl, A. (2008). *SPSS 16: Einführung in die moderne Datenanalyse*, Pearson Studium.

Bühner, M. (2011). *Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion*, Pearson Studium.

DiStefano, C., Zhu, M. und Mindrila, D. (2009). Understanding and using factor scores: Considerations for the applied researcher, *Practical Assessment, Research & Evaluation* **14**(20): S. 1–11.

Everitt, B. und Hothorn, T. (2011). *An Introduction to Applied Multivariate Analysis with R*, Springer New York.

Fahrmeir, L., Brachinger, W., Hamerle, A. und Tutz, G. (1996). *Multivariate statistische Verfahren*, de Gruyter.

Garrido E., L., Abad J., F. und Ponsoda, V. (2011). Performance of velicer's minimum average partial factor retention method with categorical variables, *Educational and Psychological Measurement* **71**: S.551–570.

Grice, J. W. (2001). Computing and evaluating factor scores, *Psychological Methods* **6**(4): S.430–450.

Horn, J. L. (1965). A rationale and test for the number of factors in factor analysis, *Psychometrika* **30**(2): S.179–185.

Kaiser, H. F. (1958). The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis, *Psychometrika* **23**(3): S.287–200.

Knüsel, L. (2008). Factor analysis: Chisquare as rotation criterion, Website. aufgerufen am: 25.05.2015.
URL: *http://epub.ub.uni-muenchen.de/6350/1/tr040.pdf*

Noack, M. (2007). Faktorenanalyse, Website. aufgerufen am: 20.05.2015.
URL: *https://www.uni-due.de/imperia/md/content/soziologie/stein/faktorenanalyse.pdf*

Revelle, W. (2015). *psych: Procedures for Psychological, Psychometric, and Personality Research*, Northwestern University, Evanston, Illinois. R package version 1.5.4.
URL: *http://CRAN.R-project.org/package=psych*