Lösungsnotizen Aufgabe 1

- 1. Schritt: Bestimme die Likelihoodfunktion

$$\begin{aligned} L(\mu,\sigma^2) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right) \end{aligned}$$

- 2. Schritt: Bestimme die Log-Likelihoodfunktion

$$\begin{aligned} l(\mu,\sigma^2) &= \ln(L(\mu,\sigma^2)) \\ &= \ln(1) - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \end{aligned}$$

a) μ unbekannt, σ^2 bekannt

- 3. Schritt: Ableiten nach μ

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu} = \frac{1}{2\sigma^2}2\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu)$$

- 4. Schritt: Nullsetzen und Auflösen nach μ

$$\frac{1}{\sigma^2}(\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu = 0 \quad \text{also} \quad \hat{\mu} = \bar{x}.$$

b) μ bekannt, σ^2 unbekannt

- 3. Schritt: Ableiten nach σ^2

$$\frac{\partial l(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

- 4. Schritt: Nullsetzen und Auflösen nach σ^2 Einsetzen von $\hat{\mu} = \bar{x}$

$$\begin{aligned} & -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{1}{2\sigma^2}\big(-n + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\big) = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = n\sigma^2 \quad \text{also} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Der ML-Schätzer $\hat{\mu} = \bar{X}$ für μ stimmt mit dem üblichen Schätzer für den Erwartungswert überein.
- Der ML-Schätzer $\hat{\sigma}^2 = \tilde{S}^2$ für σ^2 ist die Stichprobenvarianz; diese ist nicht erwartungstreu.